LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Linearna diferencijalna jednačina je oblika $\boxed{y`+p(x)y=q(x)}$ **.**

Kad dobijemo diferencijalnu jednačinu , a predpostavimo da je linearna, moramo najpre da napravimo da bude oblika $y`+p(x)y=q(x)$ **pa onda odatle " pročitamo " koliko je** $p(x)$ **i** $q(x)$ **.**

Rešenje ove jednačine je oblika : $\boxed{y(x)=e^{-\int p(x)dx}(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)}$

Pošto je malo komplikovano da ubacujemo $p(x)$ **i** $q(x)$ **u gotovo rešenje , naš savet je da najpre rešite:**

$\int p(x)dx$ **, zatim** $\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$ **pa onda da to ubacite u rešenje.**

Često se dešava situacija kad ne možemo linearnu diferencijalnu jednačinu rešavati " po y ", već moramo da je rešavamo " po x ", u tom slučaju pravimo oblik : $\boxed{x`+p(y)x=q(y)}$ **a rešenje će biti oblika:**

$$\boxed{x=e^{-\int p(y)dy}(c+\int q(y)e^{\int p(y)dy}dy)}$$

Primer 1. Reši diferencijalnu jednačinu: $y` -2xy = (x - x^3)e^{x^2}$

Rešenje:

$y` -2xy = (x - x^3)e^{x^2}$ ovo je linearna d.j. $p(x)= - 2x$ i $q(x)= (x - x^3)e^{x^2}$

Nađimo prvo rešenje integrala $\int p(x)dx$

$$\int p(x)dx= \int(-2x)dx=-2\int xdx=-2\frac{x^2}{2}=-x^2$$

Sad rešavamo $\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx=\int(x-x^3)e^{x^2}e^{-x^2}dx=\int(x-x^3)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}$$

Sad upotrebimo formulu :

$$y = e^{-\int p(x)dx}(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx)=e^{-(-x^2)}[c+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}]=e^{x^2}[c+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}]$$

$y = e^{x^2}[c+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}]$ je opšte rešenje

Primer 2. Reši diferencijalnu jednačinu: xy` - x^2 +2y = 0

Rešenje:

Ovde moramo najpre napraviti oblik $y`+p(x)y=q(x)$

xy` - x^2 +2y = 0

xy` + 2y = x^2 sve podelimo sa x ($x \neq 0$)

$y`+\frac{2}{x}y=x$ odavde zaključujemo da je p(x)=$\frac{2}{x}$ i q(x)= x

Nađimo prvo rešenje integrala $\int p(x)dx$

$\int p(x)dx = \int \frac{2}{x}dx = 2\ln|x| = \ln|x|^2$

Sad rešavamo $\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int xe^{\ln x^2}dx = \int xx^2dx = \int x^3dx = \frac{x^4}{4}$

y = $e^{-\int p(x)dx}(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx) = e^{-\ln x^2}[c+\frac{x^4}{4}] = \frac{1}{x^2}[c+\frac{x^4}{4}]$ dakle:

y = $\frac{1}{x^2}[c+\frac{x^4}{4}]$ je opšte rešenje.

Primer 3.

Reši diferencijalnu jednačinu: y\` $\cos^2 x$ = tg x – y i nađi ono partikularno rešenje koje zadovoljava uslove : x=0 i y= 0

Rešenje:

y\` $\cos^2 x$ = tg x – y

y\` $\cos^2 x$ + y = tg x sve podelimo sa $\cos^2 x$

$y` + \frac{1}{\cos^2 x} y = \frac{tgx}{\cos^2 x}$ Odavde je:

$p(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$..................$q(x) = \frac{tgx}{\cos^2 x}$

Nađimo, kao i obično, prvo rešavamo integral $\int p(x)dx$

$\int p(x)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$ tg x

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx = \int \frac{tgx}{\cos^2 x} e^{tgx} dx = \left| \begin{array}{c} tgx = t \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt \end{array} \right| = \int te^t dt = \text{parcijalna integracija......} =$$

$$\left| \begin{array}{ll} t = u & e^t dt = dv \\ dt = du & e^t = v \end{array} \right| = te^t - e^t = tgxe^{tgx} - e^{tgx}$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx\right) = e^{-tgx}[c + tgxe^{tgx} - e^{tgx}]$$

$\boxed{y = e^{-tgx}c + tgx - 1 \quad \text{opšte rešenje}}$

Menjamo ovde x=0 i y= 0

$0 = e^{-tg0}c + tg0 - 1$

0 = c – 1

c = 1

Sad ovo vratimo u opšte rešenje $y = e^{-tgx}1 + tgx - 1 = e^{-tgx} + tgx - 1$

$\boxed{y = e^{-tgx} + tgx - 1}$ je partikularno rešenje

Primer 4. Reši diferencijalnu jednačinu: $dx+(e^y-x)dy=0$

Rešenje:

Probamo da napravimo oblik " po y"

$$dx+(e^y-x)dy=0$$
$$(e^y-x)dy=-dx............./:dx$$
$$(e^y-x)\frac{dy}{dx}=-1$$
$$(e^y-x)y`=-1...............?$$

Vidimo da ne može!

Onda pokušamo da napravimo oblik **" po x"**

Najpre da se podsetimo da je $y`=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{x`}\to\boxed{y`=\frac{1}{x`}}$

$$(e^y-x)y`=-1$$
$$(e^y-x)\frac{1}{x`}=-1$$
$$e^y-x=-x`$$
$$\boxed{x`-x=-e^y}$$

Sad je postupak analogan:

$$x=e^{-\int p(y)dy}(c+\int q(y)e^{\int p(y)dy}dy)$$

$$x`-1\cdot x=-e^y\to p(y)=-1\wedge q(y)=-e^y$$
$$\int p(y)dy=\int(-1)dy=-y$$
$$\int q(y)e^{p(y)}dy=\int\left(-e^y\right)e^{-y}dy=\int(-1)dy=-y$$

$$x=e^{-\int p(y)dy}(c+\int q(y)e^{\int p(y)dy}dy)$$
$$x=e^{-(-y)}(c+(-y))$$
$$\boxed{x=e^y(c+y)}$$

Dobili smo opšte rešenje.

Primer 5.

Reši diferencijalnu jednačinu: $y` = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$

Rešenje:

$$\frac{1}{x`} = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$$
$$yx` = 2y\ln y + y - x \text{..........................} / : y$$
$$x` = 2\ln y + 1 - \frac{x}{y}$$
$$x` + \frac{x}{y} = 2\ln y + 1$$
$$x` \underbrace{\boxed{+\frac{1}{y}}}_{p(y)} x = \underbrace{\boxed{2\ln y + 1}}_{q(y)}$$

$$\int p(y)dy = \int \frac{1}{y}dy = \ln|y|$$

$$\int q(y)e^{p(y)}dy = \int (2\ln y + 1)e^{\ln y}dy = \int (2\ln y + 1)ydy$$

$$\int (2\ln y + 1)ydy = \begin{vmatrix} 2\ln y + 1 = u & ydy = dv \\ \frac{2}{y}dy = du & \frac{y^2}{2} = v \end{vmatrix} = \frac{y^2}{2}(2\ln y + 1) - \int \frac{y^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{y}}dy = \frac{y^2}{2}(2\ln y + 1) - \int ydy$$
$$= \frac{y^2}{2}(2\ln y + 1) - \frac{y^2}{2} = \frac{y^2}{2}(2\ln y \cancel{+1} \cancel{-1}) = \frac{y^2}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\ln y = \boxed{y^2 \cdot \ln y}$$

$$x = e^{-\ln y}(c + y^2 \cdot \ln y)$$
$$x = \frac{1}{y}(c + y^2 \cdot \ln y)$$
$$\boxed{x = \frac{c}{y} + y \cdot \ln y}$$

Evo opšteg rešenja.