VEROVATNOĆA ZADACI (V- DEO)

Totalna verovatnoća i Bajesova formula

Posmatrajmo neke događaje $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$ koji čine potpun sistem događaja ($H_1 + H_2 + H_3 + ... + H_n = E$ **) i**

koji su međusobno **nesaglasni** (ne mogu da se dese dva istovremeno).

Tada se neki događaj ***A,*** koji je vezan za taj opit , može realizovati istovremeno samo sa jednim od događaja

$H_1, H_2, H_3, ..., H_n$ **(hipoteze) i** njegovu verovatnoću računamo po formuli:

$$\boxed{P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) + ... + P(H_n) \cdot P(A/H_n)}$$

Ova jednakost je poznata kao **teorema o totalnoj verovatnoći.**

PRIMER 1.

Dva različita proizvoda , jedan iz jedne, drugi iz druge fabrike , nalaze se u različitim kontejnerima. Ako je verovatnoća da su proizvodi iz prvog kontejnera ispravni 0,9 a verovatnoća da su ispravni proizvodi iz drugog kontejnera 0,8 odrediti verovatnoću da se , nasumice birajući kontejnere, izvuče ispravan proizvod.

Rešenje:

Najpre ćemo opisati događaje:

A: " izvučen je ispravan proizvod "

H_1**:** " Izabran je prvi kontejner "

H_2**:** " Izabran je drugi kontejner "

A/H_1: " izvučen je ispravan proizvod ako je izabran prvi kontejner "

A/H_2: " izvučen je ispravan proizvod ako je izabran drugi kontejner "

napomena:
Neki profesori ne traže da im se sve piše detaljno, dok drugi to izričito zahtevaju. Vi radite kako kaže vaš profesor…

Koristićemo formulu totalne verovatnoće: $P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2)$

Kako imamo dva kontejnera, mogućnost da izaberemo jedan od njih je $\frac{1}{2}$, pa je $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2} = 0,5$

Verovatnoće $P(A/H_1)$ i $P(A/H_2)$ **su nam date u zadatku :** $P(A/H_1) = 0,9$ i $P(A/H_2)$=0,8

$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2)$ **pa je** $P(A) = 0,5 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,8 = 0,85$

PRIMER 2.

U prodavnicu automobilskih delova stigli su akomulatori proizvedeni u 4 različite fabrike, i to:

- **500 akomulatora iz I fabrike**
- **1050 akomulatora iz II fabrike**
- **550 akomulatora iz III fabrike**
- **1900 akomulatora iz IV fabrike**

Verovatnoća da akomulator traje više od pet godina iznosi:

- **za prvu fabriku 0,20**
- **za drugu fabriku 0,25**
- **za treću fabriku 0,30**
- **za četvrtu fabriku 0,10**

Slučajno biramo jedan akomulator. Odrediti verovatnoću da će trajati duže od pet godina.

Rešenje:

A: "izabrani akomulator će trajati duže od 5 godina"

Najpre nađemo broj svih akomulatora, iz sve četiri fabrike:

$500+1050+550+1900=4000$

H_1 - izabrani akomulator je iz I fabrike $P(H_1)=\frac{500}{4000}=0,125$

H_2 - izabrani akomulator je iz II fabrike $P(H_2)=\frac{1050}{4000}=0,2625$

H_3 - izabrani akomulator je iz III fabrike $P(H_3)=\frac{550}{4000}=0,1375$

H_4 - izabrani akomulator je iz IV fabrike $P(H_4)=\frac{1900}{4000}=0,475$

$P(A/H_1)=0,20;\quad P(A/H_2)=0,25;\quad P(A/H_3)=0,30;\quad P(A/H_4)=0,10$

$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)+P(H_4)\cdot P(A/H_4)$

$P(A)=0,125\cdot 0,20+0,2625\cdot 0,25+0,1375\cdot 0,30+0,475\cdot 0,10$
$P(A)=0,025+0,065625+0,04125+0,0475$
$P(A)=0,179375$

Bajesova formula je vezana za totalnu verovatnoću:

Neka je izvršen opit i neka se kao ishod tog opita ostvario događaj A. Često nas zanima u kojem je uslovu H_i nastupio događaj A. To su ocene verovatnoće događaja H_i / A gde je $i = 1,2,...,n$ **.** Te verovatnoće tražimo preko

Bajesove formule: $\boxed{P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}}$ $\forall i = 1,2,3,...,n$

PRIMER 3.

Prilikom eksplozije granata se raspada na parčad od tri težinske kategorije: krupna, srednja i mala, pri čemu respektivno ta parčad čine 0,1 ; 0,3 i 0,6 od ukupnog broja parčadi. Prilikom udara u oklop krupno parče ga probija sa verovatnoćom 0,9 , srednje sa verovatnoćom 0,2 i malo sa verovatnoćom 0,05. U momentu eksplozije na oklop je palo samo jedno parče i probilo ga. Naći verovatnoću da je oklop probijen krupnim, srednjim i malim parčetom.

Rešenje:

Najpre ćemo naći totalnu verovatnoću:

A: " oklop je probijen"

H_1 - krupnim parčetom $P(H_1) = 0,1$ **i** $P(A / H_1) = 0,9$

H_2 - srednjim parčetom $P(H_2) = 0,3$ **i** $P(A / H_2) = 0,2$

H_3 - malim parčetom $P(H_3) = 0,6$ **i** $P(A / H_3) = 0,05$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2) + P(H_3) \cdot P(A / H_3)$$

$$P(A) = 0,1 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,05$$

$$\boxed{P(A) = 0,18}$$

Sada uz pomoć Bajesove formule tražimo da je oklop probijen **krupnim, srednjim i malim parčetom.**

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A / H_1)}{P(A)} = \frac{0,1 \cdot 0,9}{0,18} = 0,5$$

$P(H_1 / A)$ je verovatnoća da ako je oklop probijen , da je to uradilo krupno parče.

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A / H_2)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,2}{0,18} = 0,333$$

$P(H_2 / A)$ je verovatnoća da ako je oklop probijen , da je to uradilo srednje parče.

$$P(H_3 / A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A / H_3)}{P(A)} = \frac{0,6 \cdot 0,05}{0,18} = 0,167$$

$P(H_3 / A)$ je verovatnoća da ako je oklop probijen , da je to uradilo malo parče.

PRIMER 4.

U kutiji A nalaze se 9 listića numerisanih brojevima od 1 do 9, a u kutiji B nalazi se 5 listića numerisanih brojevima od 1 do 5. Biramo kutiju nasumice i iz nje izvlačimo jedan listić. Ako je broj na listiću paran, izračunati kolika je verovatnoća da je listić izvađen iz kutije A.

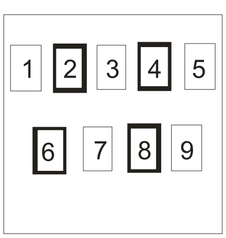
Rešenje:

M : " izvađen je paran broj"

H_1 - izabrana je prva kutija

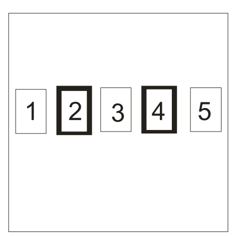
H_2 - izabrana je druga kutija

$P(H_1) = \frac{1}{2}$ **i** $P(H_2) = \frac{1}{2}$ jer imamo dve kutije od kojih biramo jednu...



$\longrightarrow P(M \setminus H_1) = \frac{4}{9}$

A



$\longrightarrow P(M \setminus H_2) = \frac{2}{5}$

B

Izračunajmo sada totalnu verovatnoću:

$$P(M) = P(H_1)P(M / H_1) + P(H_2)P(M / H_2)$$
$$P(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{19}{45}$$

Verovatnoća da ako je izvučen paran listić, da je uzet iz kutije A se obeležava $P(H_1 / M)$ **i računa se:**

$$P(H_1 / M) = \frac{P(H_1)P(M / H_1)}{P(M)}$$

$$P(H_1 / M) = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{19}{45}} = \frac{10}{19}$$

PRIMER 5.

Dva strelca nezavisno jedan od drugog , gađaju jednu metu ispaljujući po jedan metak. Verovatnoća da će prvi strelac pogoditi iznosi 0,8 a drugi 0,4. Nakon izvedenog gađanja konstatovan je jedan pogodak u metu. Naći verovatnoću da je pogodio prvi strelac. (naći verovatnoću da je pogodio drugi strelac)

Rešenje:

A: "meta je pogođena sa jednim pogotkom "

H_1 - prvi strelac pogodio metu

H_2 - drugi strelac je pogodio metu

Verovatnoća da će prvi strelac pogoditi metu je 0,2 . To znači da on promašuje metu sa verovatnoćom 0,8.

Verovatnoća da će drugi strelac pogoditi metu je 0,4 . To znači da on promašuje metu sa verovatnoćom 0,6.

Kako je meta pogođena samo jednom , to znači da je jedan od njih promašio!

Zato je :

$P(H_1) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48$ **,** to jest prvi je pogodio, drugi promašio

$P(H_2) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$**,** to jest prvi je promašio, drugi pogodio

Koristimo najpre formulu totalne verovatnoće:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A / H_1) + P(H_2) \cdot P(A / H_2)$$

$$P(A) = 0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1$$
$$P(A) = 0,56$$

Sad koristimo Bajesovu formulu:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0,48}{0,56}=\frac{48}{56}=\frac{6}{7}$$ **za prvog strelca**

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0,08}{0,56}=\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$$ **za drugog strelca**

napomena

U ovom zadatku smo mogli da posmatramo još dve hipoteze:

H_3 **- oba strelca su pogodila metu**

H_4 **- nijedan nije pogodio metu**

Međutim , u tekstu zadatka se kaže **“ Nakon izvedenog gađanja konstatovan je jedan pogodak u metu”** a to nam govori da ove dve hipoteze ne moramo uzimati u obzir.

Ponavljamo još jednom da svaki zadatak iz verovatnoće pročitate dobro, dok ga potpuno ne razumete , a onda postavite problem...

Ponavljanje opita sa dva ishoda (Bernulijeva šema)

Najpre da razjasnimo koji opiti imaju dva ishoda...

Pri bacanju novčića, kao što smo videli može da padne pismo ili grb. Znači da ovaj opit ima dva ishoda.

Pri bacanju kockice videli smo da mogu pasti brojevi 1,2,3,4,5 i 6. Ali ako mi kažemo da je događaj A: “pala je šestica” , onda i ovaj opit ima dva ishoda : pala je šestica i nije pala šestica.

Posmatramo neki događaj A koji se u opitu **ostvaruje** sa verovatnoćom p. Jasno je da se on onda **ne ostvaruje** verovatnoćom $1-p$, a mi ćemo beležiti $q=1-p$.

Dakle: $P(A)=p$ i $P(\overline{A})=q$, gde je naravno $p+q=1$

Tražimo verovatnoću da se u ***n*** nezavisnih ponavljanja događaj A ostvari ***m*** puta.

Ovo beležimo sa $P(S_n=m)$.

Opet napomena da vaš profesor možda ovo drugačije zapisuje , vi naravno radite kao i on(a).

Po naučniku koji je prvi proučavao ovu problematiku imamo **Bernulijevu šemu**:

$$\boxed{P(S_n=m)=\binom{n}{m}p^m q^{n-m}} \quad \text{ili} \quad \boxed{P(S_n=m)=\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}}$$

PRIMER 6.

Metalni novčić baci se 100 puta. Koja je verovatnoća da se grb pokaže 47 puta?

Rešenje:

G P

A: “ pao je grb”

Verovatnoća pojave grba je $P(A)=p=\frac{1}{2}$, a suprotna verovatnoća, da nije pao grb (palo je pismo) je $P(\overline{A})=q=\frac{1}{2}$

Primenom Bernulijeve šeme, gde je broj ponavljaja $n=100$ a traženi broj ostvarenja $m=47$, dobijamo:

$$P(S_n=m)=\binom{n}{m}p^m q^{n-m}$$

$$P(S_{100}=47)=\binom{100}{47}\left(\frac{1}{2}\right)^{47}\left(\frac{1}{2}\right)^{100-47}$$

$$P(S_{100}=47)=\binom{100}{47}\left(\frac{1}{2}\right)^{47}\left(\frac{1}{2}\right)^{53}$$

$$P(S_{100}=47)=\binom{100}{47}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}=\boxed{\binom{100}{47}\frac{1}{2^{100}}}$$

PRIMER 7.

Bacamo kockicu za igru 50 puta. Kolika je verovatnoća da će petica pasti tačno 7 puta?

Rešenje:

1 2 3 4 5 6

A: “ pala je petica ”

$P(A)=p=\frac{1}{6}$ i $P(\overline{A})=q=\frac{5}{6}$, broj ponavljanja je $n=50$ a broj ostvarenja $m=7$

$$P(S_n = m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$$

$$P(S_{50} = 7) = \binom{50}{7} \left(\frac{1}{6}\right)^7 \left(\frac{5}{6}\right)^{50-7}$$

$$P(S_{50} = 7) = \binom{50}{7} \left(\frac{1}{6}\right)^7 \left(\frac{5}{6}\right)^{43}$$

$$P(S_{50} = 7) = \binom{50}{7} \frac{1}{6^7} \cdot \frac{5^{43}}{6^{43}} = \boxed{\binom{50}{7} \frac{5^{43}}{6^{50}}}$$

Retko koji profesor insistira da se ovo izračunava do kraja jer se radi o «ogromnim» brojevima i neophodan je digitron...

PRIMER 8.

Vojnik pogađa metu sa verovatnoćom 0,8 (dobar strelac). Kolika je verovatnoća da će iz 10 nezavisnih pokušaja metu pogoditi tačno 9 puta?

Rešenje:

U zadatku nam je dato da je $p = 0,8$, odatle znamo da je $q = 1 - 0,8 = 0,2$

Imamo još da je $n = 10$ i $m = 9$

$$P(S_n = m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$$

$$P(S_{10} = 9) = \binom{10}{9} (0,8)^9 (0,2)^{10-9}$$

$$P(S_{10} = 9) = \binom{10}{9} (0,8)^9 (0,2)^1$$

$$P(S_{10} = 9) = 10 \cdot 0,134 \cdot 0,2$$

$$\boxed{P(S_{10} = 9) = 0,268}$$

Kad su “mali” brojevi u pitanju izračunamo do kraja…