Kombinatorika – zadaci

1. Reši nejednačine:

a) $\dfrac{(n+2)!}{n!}=72$

b) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}=30$

c) $\dfrac{(2x)!}{(2x-3)!}=\dfrac{20x!}{(x-2)!}$

Rešenja:

a) $\dfrac{(n+2)!}{n!}=72$

$$\frac{(n+2)!}{n!}=72$$
$$\frac{(n+2)(n+1)\cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}}=72$$
$$(n+2)(n+1)=72$$
$$n^2+n+2n+2-72=0$$
$$n^2+3n-70=0$$
$$n_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{9+280}}{2}=\frac{-3\pm 17}{2}$$
$$n_1=\frac{14}{2}=7$$
$$n_2=\frac{-20}{2}=-10\rightarrow \text{Ne može}$$
$$\boxed{n=7}$$

b) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}=30$

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=30$$
$$\frac{(n+1)\cdot n\cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}=30$$
$$(n+1)\cdot n=30$$
$$n^2+n-30=0$$
$$n_1=5$$
$$n_2=-6\rightarrow \text{Negativan broj, nije rešenje.}$$
$$\boxed{n=5}$$

c) $\dfrac{(2x)!}{(2x-3)!}=\dfrac{20x!}{(x-2)!}$

$$\frac{(2x)!}{(2x-3)!}=\frac{20x!}{(x-2)!}$$

$$\frac{(2x)\cdot(2x-1)\cdot(2x-2)\cancel{(2x-3)!}}{\cancel{(2x-3)!}}=\frac{20\cdot x\cdot(x-1)\cdot\cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}}$$

$$2x\cdot(2x-1)\cdot 2\cancel{(x-1)}=20x\cdot\cancel{(x-1)}$$

$$2x\cdot(2x-1)\cdot 2=20x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots/:4x$$

$$2x-1=5$$

$$2x=6$$

$$\boxed{x=3}$$

2. Reši nejednačine:

a) $V_2^n=5n+7$

b) $7\cdot V_3^x=6\cdot V_3^{x+1}$

c) $V_3^{2x+4}:V_4^{x+4}=2:3$

Rešenja:

a) $V_2^n=5n+7$

$$V_2^n=5n+7$$

$$n(n-1)=5n+7$$

$$n^2-n-5n-7=0$$

$$n^2-6n-7=0$$

$$n_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{6\pm 8}{2}$$

$$n_1=7$$

$$n_2=-1\rightarrow \textit{izbacimo}$$

$$\boxed{n=7}$$

b) $7\cdot V_3^x=6\cdot V_3^{x+1}$

$$7\cdot V_3^x=6\cdot V_3^{x+1}$$

$$7\cdot x(x-1)(x-2)=6\cdot(x+1)x(x-1)\rightarrow \text{Pokratimo šta može}$$

$$7\cdot\cancel{x}\,\cancel{(x-1)}(x-2)=6\cdot(x+1)\cancel{x}\,\cancel{(x-1)}$$

$$7(x-2)=6(x+1)$$

$$7x-14=6x+6$$

$$7x-6x=6+14$$

$$\boxed{x=20}$$

c) $V_3^{2x+4} : V_4^{x+4} = 2:3$

$V_3^{2x+4} : V_4^{x+4} = 2:3$

$3 \cdot V_3^{2x+4} = 2 \cdot V_4^{x+4}$

$3 \cdot (2x+4)(2x+3)(2x+2) = 2 \cdot (x+4)(x+3)(x+2)(x+1)$

$3 \cdot 2\cancel{(x+2)}(2x+3) \cdot \cancel{2}\cancel{(x+1)} = \cancel{2} \cdot (x+4)(x+3)\cancel{(x+2)}\cancel{(x+1)}$

$6(2x+3) = (x+4)(x+3)$

$12x + 18 = x^2 + 3x + 4x + 12$

$0 = x^2 + 3x + 4x + 12 - 12x - 18$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 7}{2}$

$x_1 = 6$

$\cancel{x_2 = -1}$

$\boxed{x = 6}$

3. Reši nejednačine:

a) $C_2^n = 55$

b) $3 \cdot C_3^{n+2} = 10 \cdot C_2^n$

c) $V_2^{x+3} = C_3^{x+2} + 20$

Rešenja:

a) $C_2^n = 55$

$C_2^n = 55$

$\dfrac{n(n-1)}{2 \cdot 1} = 55$

$n(n-1) = 110$

$n^2 - n - 110 = 0$

$n_1 = 11$

$\cancel{n_2 = -10}$

$\boxed{n = 11}$

b) $3 \cdot C_3^{n+2} = 10 \cdot C_2^n$

$$3 \cdot C_3^{n+2} = 10 \cdot C_2^n$$
$$\cancel{3} \cdot \frac{(n+2)(n+1)\cancel{n}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2 \cdot 1}} = 10 \cdot \frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{2 \cdot 1}}$$
$$(n+2)(n+1) = 10(n-1)$$
$$n^2 + n + 2n + 2 = 10n - 10$$
$$n^2 + n + 2n + 2 - 10n + 10 = 0$$
$$n^2 - 7n + 12 = 0$$
$$\boxed{n_1 = 3}$$
$$\boxed{n_2 = 4}$$

Ovde su oba rešenja dobra.

c) $V_2^{x+3} = C_3^{x+2} + 20$

$$V_2^{x+3} = C_3^{x+2} + 20$$
$$(x+3)(x+2) = \frac{(x+2)(x+1)x}{3 \cdot 2 \cdot 1} + 20$$
$$(x+3)(x+2) = \frac{(x+2)(x+1)x}{6} + 20 \text{........................} / *6$$
$$6(x+3)(x+2) = (x+2)(x+1)x + 120$$

Sve pomnožimo i prebacimo na levu stranu, dobijamo:

$$x^3 - 3x^2 - 28x + 84 = 0$$
$$x^2(x-3) - 28(x-3) = 0$$
$$(x-3)(x^2-28) = 0 \rightarrow x - 3 = 0 \vee x^2 - 28 = 0$$

Jedino rešenje je dakle ***x = 3***

4. Rešiti nejednačine u skupu prirodnih brojeva:

a) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} < 72$

b) $\frac{(y+2)!}{(y+1)(y+2)} < 100$

c) $C_5^n < C_3^n$

Rešenja:

$$\frac{(n-1)!}{(n-3)!} < 72$$

$$\frac{(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}} < 72$$

$$(n-1)(n-2) < 72$$

$$n^2 - 2n - n + 2 - 72 < 0$$

$$\boxed{n^2 - 3n - 70 < 0}$$

Najpre rešimo kvadratnu jednačinu:

$$n^2 - 3n - 70 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{3 \pm 17}{2} \rightarrow n_1 = 10 \wedge n_2 = -7$$

Kvadratni trinom ima znak broja *a* svuda osim izmedju nula.

Pošto je nejednačina $n^2 - 3n - 70 < 0$ biramo gde je **minus:** $n \in (-7, 10)$

Nama trebaju prirodni brojevi, pa je korekcija $n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

U zadatku imamo :

$$\left.\begin{array}{l}(n-1)! \rightarrow n-1 \geq 0 \rightarrow n \geq 1 \\ (n-3)! \rightarrow n-3 \geq 0 \rightarrow n \geq 3\end{array}\right\} \rightarrow n \geq 3$$

Pa kad izvršimo još jednu korekciju , dobijamo konačno rešenje: $n \in \{3,4,5,6,7,8,9\}$

b) $\dfrac{(y+2)!}{(y+1)(y+2)} < 100$

$$\frac{(y+2)!}{(y+1)(y+2)} < 100$$

$$\frac{\cancel{(y+2)}\,\cancel{(y+1)}\,y!}{\cancel{(y+1)}\,\cancel{(y+2)}} < 100$$

$$y! < 100$$

Da se podsetimo: 1!=1 , 2!=2*1=2, 3!=3*2*1=6, 4!=4*3*2*1=24, 5!=5*4*3*2*1=120

Očigledno je $y \in \{1,2,3,4\}$

Može i 0! =1<100, al nam traže samo prirodne brojeve!

c) $C_5^n < C_3^n$

$$C_5^n < C_3^n$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} < \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1} \rightarrow \text{Pazi, kod nejednačina nema skraćivanja.}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1} < 0$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\left(\frac{(n-3)(n-4)}{5\cdot 4} - 1\right) < 0$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\left(\frac{n^2-7n+12}{20} - 1\right) < 0$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\left(\frac{n^2-7n+12-20}{20}\right) < 0$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\left(\frac{n^2-7n-8}{20}\right) < 0$$

Da rastavimo kvadratni trinom na činioce....

$$n^2-7n-8=0$$

$$n_1=-1 \wedge n_2=8$$

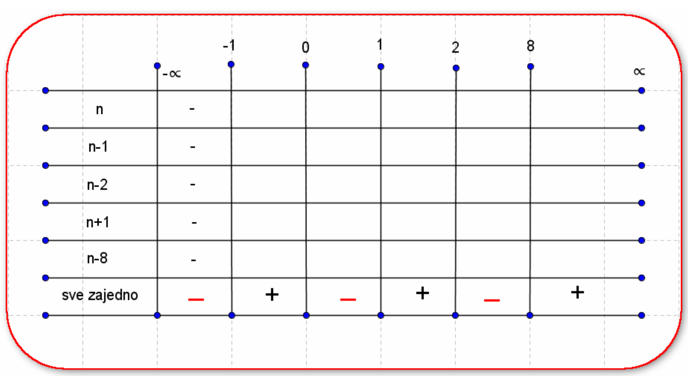
$$n^2-7n-8=0 \rightarrow (n+1)(n-8)=0$$

Vraćamo se na zadatak:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\left(\frac{n^2-7n-8}{20}\right) < 0$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n+1)(n-8)}{120} < 0$$

$$n(n-1)(n-2)(n+1)(n-8) < 0$$



Nama treba gde su minusi (crveno), i biramo samo prirodne brojeve : $n \in (2,8) \rightarrow n \in \{3,4,5,6,7\}$

Pogledajmo početak zadatka : $C_5^n < C_3^n$, on nam govori da je n veće ili jednako 5.

Dakle, rešenja su : $\boxed{n \in \{5,6,7\}}$

5. Odrediti *k* i *n* ako je : $V_k^n = 24 \wedge C_k^n = 4$

Rešenje:

$$V_k^n = 24 \wedge C_k^n = 4$$
$$C_k^n = \frac{V_k^n}{k!} \to 4 = \frac{24}{k!} \to k! = 6 \to k = 3 \quad \text{jer je } 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Sad se vratimo da nadjemo ***n*:**

$$V_3^n = 24$$
$$n(n-1)(n-2) = 24$$

Proizvod tri uzastopna prirodna broja je 24.

Jasno je da je $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \to \boxed{n = 4}$

6. Reši sistem jednačina:

$$V_2^m = 20$$
$$C_k^m = C_{k+1}^m$$

Rešenje:

Nadjemo vrednost za m iz prve jednačine:

$$V_2^m = 20$$
$$m(m-1) = 20$$
$$m^2 - m - 20 = 0$$
$$m_1 = 5$$
$$\cancel{m_2 = -4}$$
$$\boxed{m = 5}$$

Zamenimo ovu vrednost u drugu jednačinu:

$$C_k^m = C_{k+1}^m$$
$$C_k^5 = C_{k+1}^5$$

Podsetimo se da važi $C_\Omega^\Theta = C_{\Theta-\Omega}^\Theta \to \Omega + (\Theta - \Omega) = \Omega$, to jest , zbir dva donja daje gornji broj.

Da bi ovo važilo mora da je $k + (k+1) = 5 \to 2k + 1 = 5 \to \boxed{k = 2}$

Rešenje sistema je $m = 5$ i $k = 2$.