

KOMBINATORIKA

BEZ PONAVLJANJA

- 1) Permutacije od n elemenata : $P(n) = n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \circ 2 \circ 1$ još važi po definiciji : $0! = 1$
- 2) Varijacije k -te klase od n elemenata $V_k^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$
- 3) Kombinacije k -te klase od n elemenata $C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{V_k^n}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ još važi:
 $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

SA PONAVLJANJEM

- 1) Broj permutacija od n elemenata od kojih je k jednako medjusobno je $P_k(n) = \frac{n!}{k!}$
- 2) Varijacije k -te klase od n elemenata $\overline{V}_k^n = n^k$
- 3) Kombinacije $\overline{C}_k^n = \binom{n+k-1}{k}$

Sa n obeležavamo broj elemenata, a sa k klasu elementa.

PRVI PRINCIP ODBROJAVANJA: Ako jedan događaj može da se realizuje na m načina, a neki drugi na n načina, tada jedan od njih može da se realizuje na $m+n$ načina

DRUGI PRINCIP ODBROJAVANJA: Ako jedan događaj može da se realizuje na m načina , a neki drugi događaj na n načina, tada se oba događaja mogu istovremeno realizovati na mn načina

KAKO PREPOZNATI DA LI SU P , V ILI C ?

Neka je dat skup S sa n različitih elemenata. **Ako radimo sa svih n elemenata**, odnosno pravimo sve moguće različite rasporede tih n elemenata , onda ćemo upotrebiti **permutacije**. Ako trebamo formirati sve njegove podskupove od po k različitih elemenata gde nam je **bitan redosled elemenata**, onda ćemo koristiti **VARIJACIJE**. Ako trebamo formirati podskupove gde nam **nije bitan redosled elemenata** , onda ćemo upotrebiti **KOMBINACIJE**. Dve kombinacije k -te klase su jednake, ako imaju iste elemente, bez obzira kako su uređene. Na primer : $abcd = acdb = \dots = dcba$. Kod kombinacija je svejedno kako pišemo elemente u jednom slogu, dok kod varijacija o tome moramo voditi računa.

PRIMERI

1) Koliko se morzeovih znakova može formirati iz oba osnovna znaka . i -, ako se jedan znak sastoji najviše od pet elementarnih znakova?

Rešenje:

Razmišljamo:

- Imamo dva znaka : . i - (tačka i crta) pa je sigurno $n = 2$
- Pošto kaže da se jedan znak sastoji najviše od 5 elementarnih znakova razlikovaćemo 5 situacija:

- 1) Ako imamo samo 1 znak $\rightarrow \overline{V_1^2}$
- 2) Ako ima 2 znaka $\rightarrow \overline{V_2^2}$
- 3) Ako ima 3 znaka $\rightarrow \overline{V_3^2}$
- 4) Ako ima 4 znaka $\rightarrow \overline{V_4^2}$
- 5) Ako ima 5 znaka $\rightarrow \overline{V_5^2}$

Pa je konačno rešenje:

$$\begin{aligned} &= \overline{V_1^2} + \overline{V_2^2} + \overline{V_3^2} + \overline{V_4^2} + \overline{V_5^2} \\ &= 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 \\ &= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62 \end{aligned}$$

2) Odrediti broj različitih prirodnih brojeva do 100 000 koji se mogu formirati od cifara 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Rešenje:

Razmišljamo:

Traženi brojevi mogu biti:

- 1) Jednociфreni
- 2) Dvocifreni
- 3) Trocifreni
- 4) Četvorocifreni
- 5) Petocifreni

Imamo 6 brojeva: 0, 1, 2, 3, 4, 5 i cifre se mogu ponavljati, pa su u pitanju varijacije sa ponavljanjem. **Moramo paziti da 0 nije na prvom mestu!**

Zato ćemo naći sve mogućnosti pa oduzeti broj mogućnosti kada je 0 na prvom mestu.

- 1) Jednocifreni \rightarrow to su brojevi 1, 2, 3, 4, 5 to jest \bar{V}_1^5
- 2) Dvocifreni $\rightarrow \bar{V}_2^6 - \bar{V}_1^6 = 6^2 - 6^1 = 30$
- 3) Trocifreni $\rightarrow \bar{V}_3^6 - \bar{V}_2^6 = 6^3 - 6^2 = 180$
- 4) Četvorocifreni $\rightarrow \bar{V}_4^6 - \bar{V}_3^6 = 6^4 - 6^3 = 1080$
- 5) Petocifreni $\rightarrow \bar{V}_5^6 - \bar{V}_4^6 = 6^5 - 6^4 = 6480$

Dakle, konačno rešenje je: $5 + 30 + 180 + 1080 + 6480 = 7775$

3) U ravni je dato 10 različitih tačaka od kojih ni jedna trojka nije kolinearna.

Odrediti broj svih pravih koje su određene datim tačkama.

Rešenje:

Pošto je prava određena dvema različitim tačkama, znači da od 10 biramo po 2.

Pošto redosled tačaka nije bitan u pitanju su kombinacije.

$$C_2^{10} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$$

10 tačaka od kojih ni jedna trojka nije kolinearna (ne leži na istoj pravoj) određuju 45 pravih

4) Košarkaški tim sačinjavaju 5 bekova, 4 centra i 3 krila. Na koliko načina se može od njih sastaviti petorka ako u njoj moraju da bar 2 beka i bar jedan centar?

Rešenje:

Razmišljamo:

Pošto u zadatku kaže da moraju u petorci igrati bar 2 beka i 1 centar to nam daje više mogućnosti

- 1) 2 beka, 1 centar, 2 krila $\rightarrow C_2^5 \cdot C_1^4 \cdot C_2^3$
- 2) 2 beka, 2 centra, 1 krilo $\rightarrow C_2^5 \cdot C_2^4 \cdot C_1^3$
- 3) 2 beka, 3 centra $\rightarrow C_2^5 \cdot C_3^4$
- 4) 3 beka, 1 centar, 1 krilo $\rightarrow C_3^5 \cdot C_1^4 \cdot C_1^3$
- 5) 3 beka, 2 centra $\rightarrow C_4^5 \cdot C_2^4$
- 6) 4 beka, 1 centar $\rightarrow C_4^5 \cdot C_1^4$

Sad je broj svih mogućnosti:

$$C_2^5 \cdot C_1^4 \cdot C_2^3 + C_2^5 \cdot C_2^4 \cdot C_1^3 + C_2^5 \cdot C_3^4 + C_3^5 \cdot C_1^4 \cdot C_1^3 + C_3^5 \cdot C_2^4 + C_4^5 \cdot C_1^4 =$$

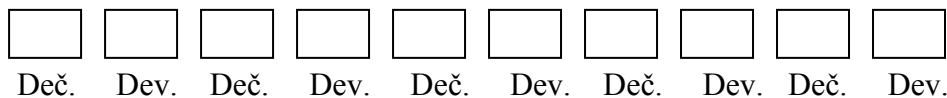
$$\binom{5}{2} \binom{4}{1} \binom{3}{2} + \binom{5}{2} \binom{4}{2} \binom{3}{1} + \binom{5}{2} \binom{4}{3} + \binom{5}{3} \binom{4}{1} \binom{3}{1} + \binom{5}{3} \binom{4}{2} + \binom{5}{4} \binom{4}{1} = 540 \text{ mogućnosti}$$

5) Na koliko različitih načina se može raspodeliti 5 dečaka i 5 devojčica u bioskopskom redu od 10 stolica tako da dva dečaka nikad ne sede jedan pored drugog?

Rešenje:

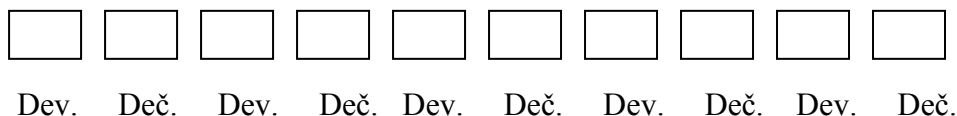
Razmišljamo:

Pošto ima 10 mesta a 2 dečaka ne smeju biti jedan do drugog, to znači da raspored ide jedan dečak jedna devojčica.



- Mogućnost za dečake je 5!
- Mogućnost za devojčice je 5!

Ali moramo razmišljati da na prvom mestu može biti i devojčica.



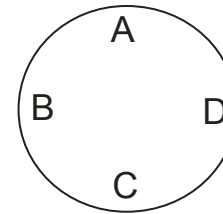
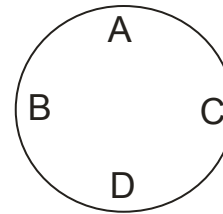
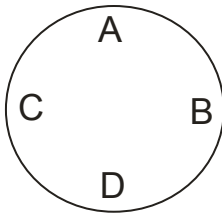
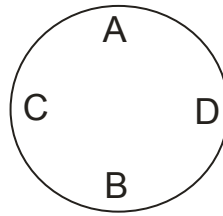
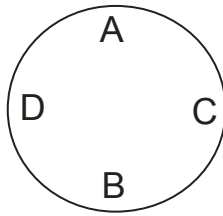
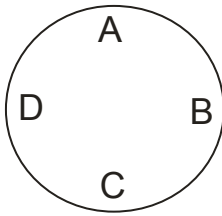
Pa je broj svih mogućnosti:

$$2 \cdot 5! \cdot 5! = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 120 \cdot 120 = 28800$$

6) Na koliko načina četiri osobe mogu da stanu u krug?

Rešenje:

Najbolje da mi to nacrtamo



Dakle ima 6 mogućnosti!

7) Koliko ima četvorocifrenih brojeva koji počinju sa 2 a završavaju se sa 7?

Rešenje:

To su brojevi $2 \square \square \square 7$, gde umesto kvadratića mogu biti brojevi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Znači, broj mogućnosti je:

$$\overline{V}_2^{10} = 10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

8) Koliko ima trocifrenih brojeva koji su deljivi sa 5?

Rešenje:

Trocifreni brojevi su od 100 do 999. Znači ima 900 brojeva.

Pošto je svaki peti deljiv sa 5 počevši od 100 to takvih brojeva ima $900:5=180$

9) Koliko ima brojeva izmedju 3000 i 6000 koji se završavaju sa 3 ili 7?

Rešenje:

→ Brojevi koji počinju sa 3 su

$$3 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} 3 \rightarrow \bar{V}_2^{10} = 10^2 = 100$$

$$3 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} 7 \rightarrow \bar{V}_2^{10} = 10^2 = 100$$

→ Brojevi koji počinju sa 4

$$4 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} 3 \rightarrow \bar{V}_2^{10} = 10^2 = 100$$

$$4 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} 7 \rightarrow \bar{V}_2^{10} = 10^2 = 100$$

→ Brojevi koji počinju sa 5

$$5 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} 3 \rightarrow 100$$

$$5 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} 7 \rightarrow 100$$

Ukupno ima $100 \cdot 6 = 600$ brojeva.