

## BINOMNA FORMULA

Upoznajmo se najpre sa nekim oznakama:

**n !** - čita se "en faktorijel" a označava sledeći proizvod:

$$n! = n \circ (n-1) \circ (n-2) \circ \dots \circ 3 \circ 2 \circ 1$$

**Primer:**

$$5! = 5 \circ 4 \circ 3 \circ 2 \circ 1 = 120 \quad \text{ili} \quad 7! = 7 \circ 6 \circ 5 \circ 4 \circ 3 \circ 2 \circ 1 = 5040$$

**Po definiciji je  $0! = 1$**

U zadacima često koristimo trik da faktorijel rastavimo kao proizvod nekoliko članova i novog faktorijela.

Tako je recimo:

$$\begin{aligned} (n+2)! &= (n+2)(n+1)n(n-1) \circ \dots \circ 2 \circ 1 \\ (n+2)! &= (n+2)(n+1)n! \quad \text{ili} \\ (n+2)! &= (n+2)(n+1)n(n-1)! \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

**Primer 1.**

Skrati razlomak:  $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$

**Rešenje:** 
$$\frac{(n-1)!}{(n-3)!} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = \frac{(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}} = (n-1)(n-2)$$

**Primer 2.**

Reši jednačinu :  $\frac{(2x)!}{(2x-3)!} = \frac{20x!}{(x-2)!}$

**Rešenje:** 
$$\frac{(2x)!}{(2x-3)!} = \frac{20x!}{(x-2)!}$$

$$\frac{(2x)(2x-1)(2x-2)(2x-3)!}{(2x-3)!} = \frac{20x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!}$$

$$\frac{(2x)(2x-1)(2x-2)\cancel{(2x-3)!}}{\cancel{(2x-3)!}} = \frac{20x(x-1)\cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}}$$

$$\begin{aligned} (2x)(2x-1)(2x-2) &= 20x(x-1) \\ 2x(2x-1)2(x-1) &= 20x(x-1) \quad [\text{skratimo sa } 4x(x-1)] \\ 2x-1 &= 5 \quad \text{a odavde je } x=3 \end{aligned}$$

Ako su  $n$  i  $k$  prirodni brojevi, onda možemo definisati simbol:  $\binom{n}{k}$

On se čita “**en nad ka**”, a izračunava se :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

**Primeri:**

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \circ 9}{2 \circ 1} = 45 \quad \text{ili} \quad \binom{15}{3} = \frac{15 \circ 14 \circ 13}{3 \circ 2 \circ 1} = 455$$

Da bi imali **brzinu u radu** moramo zapamtiti da je :

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{na primer:} \quad \binom{5}{0} = 1 \quad \binom{12}{0} = 1 \quad \text{itd.}$$

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \text{na primer:} \quad \binom{7}{7} = 1 \quad \binom{100}{100} = 1 \quad \text{itd.}$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \text{na primer:} \quad \binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4 \quad \binom{50}{1} = \binom{50}{49} = 50$$

I najvažnije :  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Na primer dobijemo da rešimo  $\binom{20}{18}$  . Koristeći ovo pravilo mi rešavamo :

$$\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \circ 19}{2 \circ 1} = 190. \quad \text{Mnogo je lakše ovako!}$$

Sada možemo videti kako izgleda **binomni obrazac**:

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n}$$

Ova formula se lako dokazuje primenom matematičke indukcije.

### Šta je važno uočiti?

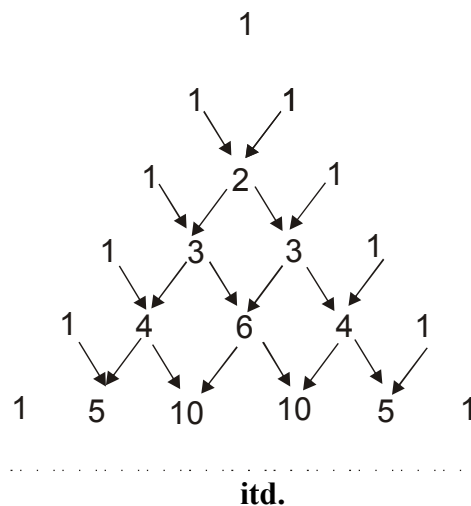
- U razvoju uvek ima  $n+1$  članova
- $a$  počinje sa  $n$ -tim stepenom, pa u svakom sledećem članu opada dok ne dođe do nule, dok  $b$  počinje sa nulom pa u svakom sledećem članu raste dok ne dođe do  $n$ -tog stepena
- Izrazi  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}$  i  $\binom{n}{n}$  su binomni koeficijenti, i za njih važi jedna zanimljiva stvar:

Ako pođemo od nekoliko prvih razvoja dobićemo takozvani **Paskalov trougao**.

$(a+b)^0 = 1$	koeficijent je 1	1
$(a+b)^1 = a+b$	koeficijenti su 1 i 1	1   1
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$	koeficijenti su 1, 2, 1	1   2   1
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	koeficijenti su 1, 3, 3, 1	1   3   3   1
$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	koeficijenti su 1, 4, 6, 4, 1 itd.	1   4   6   4   1

**Vidimo da su simetrični koeficijenti u razvijenom obliku binoma jednaki.**

Oni prave **Paskalov trougao**, gde su na kracima sve jedinice, a unutrašnji član se dobija sabiranjem gornja dva!



**Opšti (bilo koji) član u razvijenom obliku binoma se traži po formuli:**

$$\mathbf{T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

1)  $(3 + 2x)^5 = ?$

**Rešenje:**

$$(3 + 2x)^5 = [\text{Ovde je } a = 3, b = 2x \text{ i } n = 5]$$

$$\binom{5}{0} 3^5 (2x)^0 + \binom{5}{1} 3^4 (2x)^1 + \binom{5}{2} 3^3 (2x)^2 + \binom{5}{3} 3^2 (2x)^3 + \binom{5}{4} 3^1 (2x)^4 + \binom{5}{5} 3^0 (2x)^5$$

Ako vam je lakše izdvojite binomne koeficijente "na stranu", pa ih rešite:

$$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$$

$$\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 = \binom{5}{3}$$

Sad ovo vratimo u razvoj:

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 3^5 \cdot 1 + 5 \cdot 3^4 \cdot 2 \cdot x + 10 \cdot 3^3 \cdot 2^2 x^2 + 10 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot x^3 + 5 \cdot 3 \cdot 2^4 \cdot x^4 + 1 \cdot 1 \cdot 2^5 \cdot x^5 = \\ &= 243 + 810x + 1080x^2 + 720x^3 + 240x^4 + 32x^5 \end{aligned}$$

$$2) (1+i)^6 = ?$$

**Rešenje:**

$$(1+i)^6 = [\text{Ovde je } a=1, b=i \quad i \quad n=6]$$

$$= \binom{6}{0} 1^6 \cdot i^0 + \binom{6}{1} 1^5 \cdot i^1 + \binom{6}{2} 1^4 \cdot i^2 + \binom{6}{3} 1^3 \cdot i^3 + \binom{6}{4} 1^2 \cdot i^4 + \binom{6}{5} 1^1 \cdot i^5 + \binom{6}{6} 1^0 \cdot i^6$$

$$\binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1$$

$$\binom{6}{1} = \binom{6}{5} = 6$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 = \binom{6}{4}$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

Da vas podsetimo:

$$\left. \begin{array}{l} i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \end{array} \right\} \text{pa je } \begin{array}{l} i^5 = i^4 \cdot i = i \\ i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1 \end{array}$$

Vratimo se u zadatak:

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot i + 15 \cdot 1 \cdot (-1) + 20 \cdot 1 \cdot (-i) + 15 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot i + 1 \cdot 1 \cdot (-1)$$

$$= 1 + 6i - 15 - 20i + 15 + 6i - 1$$

$$= -8i$$

3) Odrediti peti član u razvijenom obliku binoma  $\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}\right)^{12}$

**Rešenje:**

Odavde je  $a = x^{\frac{1}{2}}$ ,  $b = x^{\frac{2}{3}}$ ,  $n = 12$

Iskoristićemo formulu:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Pošto traže peti član, to je  $T_5 = T_{4+1}$  **Pazi ovde je k = 4**

$$\begin{aligned} T_5 = T_{4+1} &= \binom{12}{4} \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{12-4} \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^4 \\ &= \binom{12}{4} x^4 \cdot x^{\frac{8}{3}} \\ &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} x^{4+\frac{8}{3}} \\ &= 495 \cdot x^{\frac{20}{3}} \end{aligned}$$

4) Odrediti član koji ne sadrži x u razvijenom obliku binoma  $(x + x^{-2})^{12}$

**Rešenje:**

Odavde je  $a = x$ ,  $b = x^{-2}$ ,  $n = 12$  Upotrebićemo formulu  $T_{k+1}$  i naći k:

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \\ &= \binom{12}{k} x^{12-k} (x^{-2})^k \\ &= \binom{12}{k} x^{12-k} \cdot x^{-2k} \\ &= \binom{12}{k} x^{12-3k} \end{aligned}$$

Pošto nam treba član koji **ne sadrži x**, izvršićemo upoređivanje:

$$x^{12-3k} = x^0$$

$$12 - 3k = 0$$

$$3k = 12$$

$$k = 4$$

Znači, u pitanju je ( $T_{4+1} = T_5$ ) **peti član**.  $T_{k+1} = \binom{12}{k} x^{12-3k} \rightarrow T_5 = \binom{12}{4}$

5) Zbir koeficijenta prvog, drugog i trećeg člana u razvoju binoma  $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$  jednak je 46. Naći koji član ne sadrži  $x$ .

**Rešenje:**

Zbir koeficijenta prva tri člana je:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 46$$

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 46$$

$$2 + 2n + n^2 - n = 92$$

$$n^2 + n - 90 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm 19}{2} \Rightarrow n_1 = 9; n_2 = -10$$

$$n = 9$$

Kako je  $a = x^2$  i  $b = \frac{1}{x}$ ,  $n = 9$

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$$= \binom{9}{k} (x^2)^{9-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k$$

$$= \binom{9}{k} x^{18-2k} \cdot x^k$$

$$= \binom{9}{k} x^{18-3k}$$

Sada mora biti:  $x^{18-3k} = x^0$

$$18 - 3k = 0$$

$$3k = 18$$

$$k = 6$$

**Znači da je u pitanju sedmi član.**

Ako profesor insistira, nadjite baš i rešenje:  $T_7 = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$

6) Odrediti koeficijente uz  $x^3$  u razvoju binoma  $\left(\frac{1}{4x} - 2x^2\right)^{12}$

Rešenje:

$$\left(\frac{1}{4x} - 2x^2\right)^{12} \text{ odavde je } a = \frac{1}{4x}, b = -2x^2, n = 12$$

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \\ &= \binom{12}{k} \left(\frac{1}{4x}\right)^{12-k} \cdot (-2x^2)^k \\ &= \binom{12}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{12-k} x^{k-12} \cdot (-2)^k \cdot x^{2k} \\ &= \binom{12}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{12-k} \cdot (-2)^k \cdot \underbrace{x^{3k-12}}_{\text{Ovo je } x^3} \end{aligned}$$

Dakle:  $x^{3k-12} = x^3$

$$3k - 12 = 3$$

$$3k = 15$$

$$k = 5$$

Pa će koeficijent uz  $x^3$  biti

$$\begin{aligned} \binom{12}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{12-k} (-2)^k &= \\ \binom{12}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot (-2)^5 &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{4^7} \cdot (-32) \\ &= -\frac{99}{64} = -1,546875 \end{aligned}$$



7) Koeficijent drugog člana u razvoju binoma  $\left(\frac{x}{\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{y}}{x}\right)^n$  odnosi se prema koeficijentu trećeg člana kao 2:11. Odrediti peti član.

Rešenje:

$$\binom{n}{1} : \binom{n}{2} = 2 : 11$$

$$n : \frac{n(n-1)}{2} = 2 : 11$$

$$11n = n(n-1)$$

$$11n = n^2 - n$$

$$n^2 - 12n = 0$$

$$n(n-12) = 0 \Rightarrow n = 0 \quad \vee \quad n = 12, \text{ pazi: } n=0 \text{ nije rešenje!}$$

Pošto je  $a = \frac{x}{\sqrt{4}}, b = \frac{\sqrt{y}}{x}, n = 12$  a traži se peti član, to je:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$$T_5 = T_{4+1} = \binom{12}{4} \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^8 \cdot \left(\frac{\sqrt{y}}{x}\right)^4$$

$$= \binom{12}{4} \frac{x^8}{y^4} \cdot \frac{y^2}{x^4}$$

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{x^4}{y^2}$$

$$= 495x^4y^{-2}$$

8) Na železničku stanicu treba da stigne iz istog pravca  $n$  ljudi. Na koliko mogućih načina, s obzirom na vreme dolaska, mogu da stignu na stanicu?

Rešenje:

Razmišljamo:

- mogu da stignu svi u različiti vreme
- mogu da stignu dva zajedno, ostali u različito vreme
- mogu da stignu tri zajedno, ostali u različito vreme
- itd
- mogu da stignu u grupama po 2
- mogu da stignu u grupama po 3
- itd

Broj svih mogućnosti je:

$$C_1^n + C_2^n + C_3^n + \dots + C_n^n = \\ \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} =$$

Da bi smo ovo izračunali podjimo od binomne formule:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Ako umesto  $a$  i  $b$  stavimo jedinice, dobićemo:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} \cdot 1 \cdot 1 + \binom{n}{1} \cdot 1 \cdot 1 + \dots + \binom{n}{n} \cdot 1 \cdot 1$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - \binom{n}{0}$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$$

Dakle broj svih mogućnosti je:  $2^n - 1$