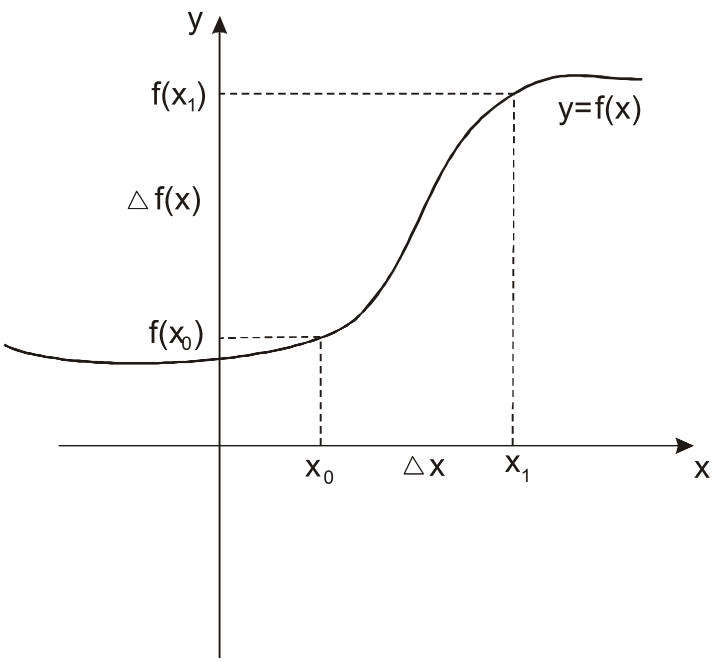
IZVOD FUNKCIJE

Predpostavimo da je funkcija f(x) definisana u nekom intervalu (a,b) i da je tačka x_0 iz intervala (a,b) fiksirana.

Uočimo neku proizvoljnu tačku x_1 iz tog intervala (a,b). Ova tačka x_1 može da se pomera levo desno, pa ćemo je zvati promenljiva tačka intervala (a,b). Razlika $\mathbf{x_1 - x_0}$ pokazuje promenu ili priraštaj vrednosti nezavisno promenljive x i najčešće se obeležava sa $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x_1 - x_0}$

Razlika $f(x_1)- f(x_0)$ predstavlja odgovarajuću promenu ili priraštaj funkcije f(x) i obično se obeležava sa $\Delta \mathbf{f(x)= f(x_1)- f(x_0)}$ ili ako je funkcija označena sa y=f(x) može se zapisati: $\Delta \mathbf{y= f(x_1)- f(x_0)}$**.**

Evo kako bi to izgledalo na slici:



Količnik $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ naziva se srednjom ili prosečnom brzinom promene funkcije u intervalu $[x_0,x_1]$

Razmišljamo šta će se dešavati kada se tačka x_1 približava tački x_0?(то jest kad x_1 teži x_0)

Ako ta granična vrednost postoji normalno je da nju uzmemo za brzinu promene funkcije u tački x_0.

Brzina promene funkcije f(x) u tački $\mathbf{x_0}$ u matematici se naziva **IZVOD** funkcije i obeležava se sa :

$f`(x_0)$ ili sa y` . Dakle **definicija izvoda je :**

$$f`(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

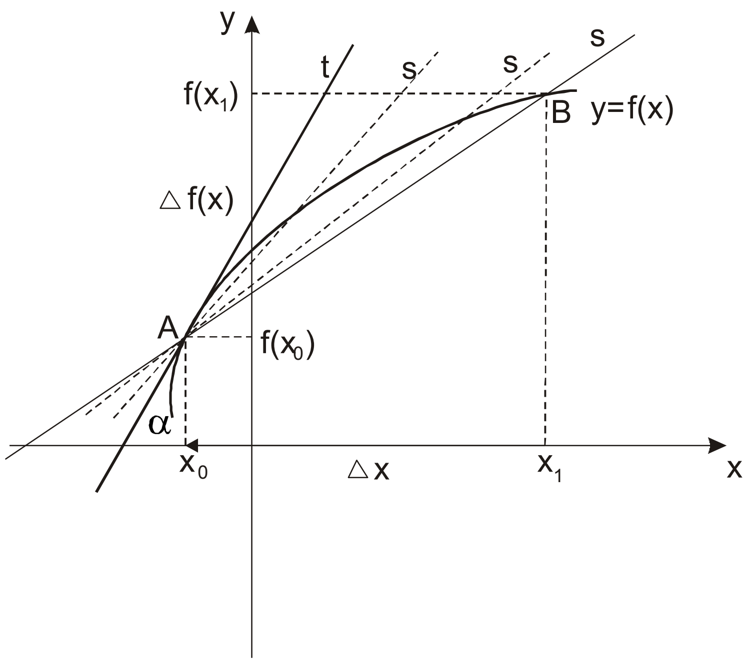
Često se umesto tačke x_0 jednostavno stavlja x pa izvod onda glasi:

$$\boxed{f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Rečima ova **definicija** bi glasila:

Izvod funkcije jednak je graničnoj vrednosti količnika priraštaja funkcije i priraštaja nezavisno promenljive, kad priraštaj nezavisno promenljive teži nuli.

Geometrijska interpretacija izvoda



Posmatrajmo sečicu S koja prolazi kroz tačke $A(x_0,f(x_0))$ i $B(x_1,f(x_1))$. U situaciji kada se Δx smanjuje, odnosno x_1 se sve više približava tački x_0, ona sve manje i manje seče datu krivu y=f(x) dok u jednom graničnom trenutku ne **postane tangenta t te krive**!

Tada količnik priraštaja funkcije i priraštaja nezavisno promenljive $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ predstavlja koeficijent pravca k, to jest tangens ugla koji tangenta zaklapa sa pozitivnim smerom x ose.

Dakle**: VREDNOST PRVOG IZVODA U TOJ TAČKI JE : y` = tgα =k**

TABLICA IZVODA

1. $C`=0$
2. $x`=1$
3. $(x^2)`=2x$
4. $(x^n)`=nx^{n-1}$

---

5. $(a^x)`=a^x \ln a$
6. $(e^x)`=e^x$
7. $(\log_a x)`=\frac{1}{x\ln a}$
8. $(\ln x)`=\frac{1}{x}$
9. $(\sqrt{x})`=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $\left(\frac{1}{x}\right)` = -\frac{1}{x^2}$

---

11. $(\sin x)`=\cos x$
12. $(\cos x)`= - \sin x$
13. $(tgx)`=\frac{1}{\cos^2 x}$
14. $(ctgx)`=-\frac{1}{\sin^2 x}$

---

15. $(\arcsin x)`=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(\arccos x)`= - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17. $(arctgx)`= \frac{1}{1+x^2}$
18. $(arcctgx)`= - \frac{1}{1+x^2}$

PRAVILA ZA IZVODE

1. **$[cf(x)]`=cf`(x)$**
2. **$[f(x)\pm g(x)]` = f`(x) \pm g`(x)$**
3. **$(u \circ v)`=u`v+v`u$** **izvod proizvoda**
4. **$\left(\frac{u}{v}\right)` = \frac{u`v-v`u}{v^2}$** **izvod količnika**
5. **$f[g(x)]`= f`[g(x)] \circ g`(x)$** **izvod složene funkcije**

$$\boxed{f`(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$$ **<u>izvod po definiciji</u>**

Izvod funkcije u parametarskom obliku

Ako je funkcija zadata parametarski **x=x(t) i y=y(t)** prvi izvod tražimo:

$$\mathbf{y_x}` = \frac{y_t`}{x_t`}$$

Izvod implicitno zadate funkcije

Kada je funkcija y=f(x) zadata u implicitnom obliku F(x,y) = 0 , njen prvi izvod dobijamo iz relacije:

$$\frac{d}{dx}F(x,y)=0$$

Izvodi višeg reda

$y``= (y`)`$ $\longrightarrow$ drugi izvod je prvi izvod prvog izvoda

$y```=(y``)`$ $\longrightarrow$ treći izvod je prvi izvod drugog izvoda

-·-

$y^{(n)}= (y^{n-1})`$ $\longrightarrow$ n-ti izvod je prvi izvod (n-1)-vog izvoda

Jednačina tangente

Jednačina tangente na krivu y=f(x) u tački (x_0,y_0) u kojoj je funkcija diferencijabilna, računa se po formuli:

$$\mathbf{y - y_0 = f`(x_0)(x - x_0)}$$

Jednačina normale

Normala na krivu y=f(x) u tački (x_0,y_0) je prava normalna na tangentu krive u toj tački. Njena jednačina je :

$$\mathbf{y - y_0} = \frac{-1}{f`(x_0)}\,\mathbf{(x - x_0)}$$

Diferencijal

Ako je funkcija y=f(x) diferencijabilna u tački x, tada je $\Delta y = y' \Delta x + o(\Delta x)$ kada $\Delta x \longrightarrow 0$

Glavni deo $y' \Delta x$ priraštaja Δy vrednosti funkcije nazivamo diferencijalom funkcije y=f(x).

Specijalno za y = x važi da je $dx = x' \Delta x = 1 \Delta x = \Delta x$, pa je:

$$\mathbf{dy = y'\, dx} \quad \textbf{tj.} \quad \mathbf{y'} = \frac{dy}{dx}$$

Osnovne teoreme diferencijalnog računa

1) Fermaova teorema

Neka je funkcija y=f(x) definisana na odsečku [a,b] i neka u nekoj tački $c \in (a,b)$ ima najveću (ili najmanju) vrednost. Ako postoji obostrani konačan izvod $f'(c)$, onda je $\mathbf{f'(c) = 0}$

2) Darbuova teorema

Ako funkcija y=f(x) ima konačan izvod u svakoj tački odsečka [a,b] , tada funkcija $y'=f'(x)$ za $x \in [a,b]$ uzima bar jednom sve vrednosti između $f'(a)$ i $f'(b)$

3) Rolova teorema

Neka je funkcija y=f(x) definisana i neprekidna na odsečku [a,b] i neka postoji konačan izvod $y'=f'(x)$ bar na intervalu (a,b) i neka je f(a) = f(b).
Tada postoji bar jedan broj $c \in (a,b)$, takav da je $\mathbf{f'(c) = 0}$

4) Lagranžova teorema

Neka je funkcija y=f(x) definisana i neprekidna na odsečku [a,b] i neka postoji konačan izvod $y'=f'(x)$ bar u svakoj tački na intervalu (a,b) .
Tada postoji bar jedan broj $c \in (a,b)$, takav da je :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

5) Košijeva teorema

Neka su funkcije f(x) i g(x) definisane i neprekidne na odsečku [a,b] , neka postoje konačni izvodi $f'(x)$ i $g'(x)$ bar na intervalu (a,b) i neka je $g'(x) \neq 0$, za svako $x \in (a,b)$.
Tada postoji bar jedan broj $c \in (a,b)$ takav da je :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$