

INVERZNA FUNKCIJA

Definišimo najpre bijektivno preslikavanje:

Za preslikavanje $f: A \rightarrow B$ kažemo da je :

1) “jedan – jedan” (obostrano jednoznačno), što skraćeno pišemo “1-1”, ako važi

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

2) “na” ako je $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$

3) **bijektivno** ako je “1-1” i “na”

Preslikavanje skupa A na sebe, u oznaci i_A , sa osobinom $(\forall x \in A)(i_A(x) = x)$ naziva se identičkim (jediničnim) preslikavanjem skupa A .

Ako je $f: A \rightarrow B$ bijektivno preslikavanje, onda sa f^{-1} ožučavamo preslikavanje skupa B na skup A , koje ima osobinu da je $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = i_A$. U tom slučaju f^{-1} nazivamo inverznim preslikavanjem preslikavanja f .

Postupak za rešavanje zadataka :

i) *Umesto $f(x)$ stavimo y*

ii) *Odavde izrazimo x preko y*

iii) *Izvršimo izmenu : umesto x pišemo $f^{-1}(x)$, a umesto y pišemo x .*

Zadaci

1. Data je funkcija $f(x) = 2x - 1$. Odrediti njenu inverznu funkciju i skicirati grafike funkcija $f(x)$ i $f^{-1}(x)$.

Rešenje:

$$f(x) = 2x - 1 \quad \text{Umesto } f(x) \text{ stavimo } y$$

$$y = 2x - 1 \quad \text{Odavde izrazimo } x \text{ preko } y$$

$$2x = y + 1$$

$$x = \frac{y+1}{2} \quad \text{Izvršimo izmenu : umesto } x \text{ pišemo } f^{-1}(x), \text{ a umesto } y \text{ pišemo } x.$$

$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ i evo nam inverzne funkcije.

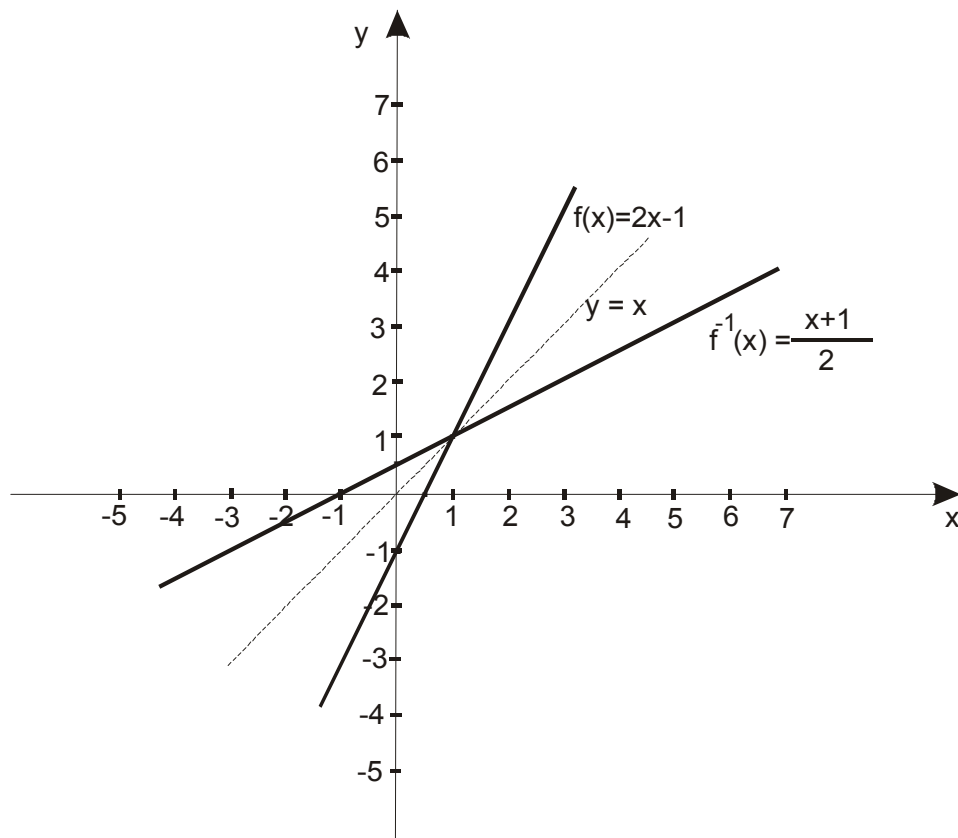
Pošto obe funkcije predstavljaju prave, uzećemo po dve proizvoljne tačke (prvo $x = 0$, pa $y = 0$) i nacrtati ih.

$$f(x) = 2x - 1$$

x	0	1/2
f(x)	-1	0

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

x	0	-1
f ⁻¹ (x)	1/2	0



Primetimo da su grafici simetrični u odnosu na pravu $y = x$.

2. Data je funkcija $f(x) = \log_2(x-1)$. Odrediti njenu inverznu funkciju i skicirati grafike funkcija $f(x)$ i $f^{-1}(x)$.

Rešenje:

$$f(x) = \log_2(x-1) \quad \text{Umesto } f(x) \text{ stavimo } y$$

$$y = \log_2(x-1) \quad \text{Oдавde izrazimo } x \text{ preko } y$$

$$x - 1 = 2^y$$

$$x = 2^y + 1 \quad \text{umesto } x \text{ pišemo } f^{-1}(x), \text{ a umesto } y \text{ pišemo } x$$

$$f^{-1}(x) = 2^x + 1 \quad \text{evo inverzne funkcije}$$

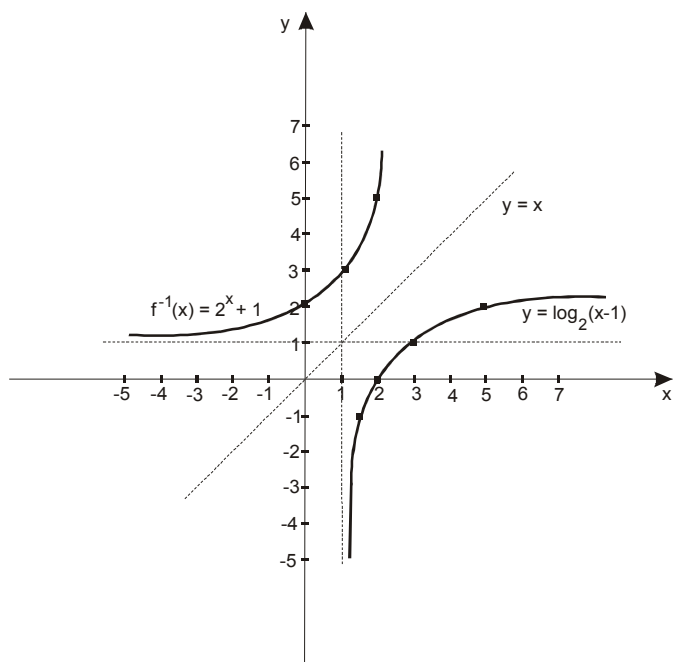
Skicirajmo sada grafike:

$f(x) = \log_2(x-1)$. Ova funkcija je definisana za $x-1 > 0$, odnosno za $x > 1$, a to nam govori da je $x = 1$ vertikalna asimptota sa leve strane. Uzmimo kao i malopre nekoliko proizvoljnih vrednosti i popunimo tablicu:

x	3/2	2	3	5
f(x)	-1	0	1	2

$f^{-1}(x) = 2^x + 1$. Ova funkcija očigledno ne može imati vrednosti manje ili jednake sa 1, što nam govori da je 1 njena horizontalna asimptota. Uzmimo nekoliko proizvoljnih vrednosti i popunimo tablicu:

x	-1	0	1
$f^{-1}(x)$	3/2	2	3



Uočimo opet da su grafici simetrični u odnosu na pravu $y = x$.

3. **Odredi inverznu funkciju funkcije $f(x) = 3^x - 1$**

Rešenje:

$$f(x) = 3^x - 1$$

$$y = 3^x - 1$$

$$3^x = y + 1$$

$$x = \log_3(y + 1)$$

$$f^{-1}(x) = \log_3(x + 1)$$

4. **Data je funkcija $f(x) = x^2$. Odrediti njenu inverznu funkciju i skicirati grafike funkcija $f(x)$ i $f^{-1}(x)$.**

Rešenje:

$$f(x) = x^2$$

$$y = x^2$$

$$x = \pm \sqrt{y} \text{ pa je } f^{-1}(x) = \pm \sqrt{x}$$

Nije bilo teško ovo rešiti, međutim ovo rešenje nije korektno ! Zašto?

Moramo voditi računa o tome gde je funkcija rastuća, a gde opadajuća!

$f(x) = x^2$ je opadajuća za $x < 0$ pa njoj odgovara opadajuća grana inverzne funkcije : $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

$f(x) = x^2$ je rastuća za $x > 0$ pa njoj odgovara rastuća grana inverzne funkcije : $f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$

E ovo sad je korektno rešenje!

5. Data je funkcija $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Odrediti $f^{-1}(x)$.

Rešenje:

$$f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$y = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = 2^y$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = 2^y - x \quad \text{kvadriramo ...}$$

$$x^2 + 1 = 2^{2y} - 2x \cdot 2^y + x^2 \quad \text{potiremo } x^2 \dots$$

$$2x \cdot 2^y = 2^{2y} - 1$$

$$x = \frac{2^{2y} - 1}{2^{y+1}}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2^{2x} - 1}{2^{x+1}} \quad \text{a ovo možemo malo da prisredimo ...}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2^{2x} - 1}{2^{x+1}} = \frac{2^{2x} - 1}{2^x \cdot 2} = \frac{\frac{2^{2x}}{2^x} - \frac{1}{2^x}}{2} = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$$

6. Data je funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}}$. Odrediti $f^{-1}(x)$.

Rešenje:

$$f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}}$$

$$y = \sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}} \quad \text{Ovo sve ide na treći stepen.}$$

Podsetimo se najpre formule :

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A^3 + 3AB(A+B) + B^3$$

$$y^3 = x + \sqrt{1 + x^2} + 3\sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}} (\sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}}) + x - \sqrt{1 + x^2}$$

$$y^3 = 2x + 3\sqrt[3]{(x + \sqrt{1 + x^2})(x - \sqrt{1 + x^2})} y$$

$$y^3 = 2x + 3\sqrt[3]{x^2 - 1 - x^2} y$$

$$y^3 = 2x - 3y$$

$$2x = y^3 + 3y$$

$$x = \frac{y^3 + 3y}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^3 + 3x}{2}$$