Kompleksni brojevi

Kompleksni brojevi su izrazi oblika: $z = a + bi$ gde su a i b realni brojevi a $i \rightarrow$ simbol koji ima vrednost $i = \sqrt{-1}$.

Za kompleksan broj $z = a + bi$, a je njegov **realni deo** i obeležava se $\mathrm{Re}(z) = a$, b je njegov **imaginarni deo** i obeležava se $\mathrm{Im}(z) = b$, a $i = \sqrt{-1}$ je **imaginarna jedinica**.

$$\begin{aligned} i^{4k} &= 1 \\ i^{4k+1} &= i \\ i^{4k+2} &= -1 \\ i^{4k+3} &= -i \end{aligned} \qquad \text{za} \quad k \in N.$$

Zbir dva kompleksna broja $a + bi$ i $c + di$ je kompleksan broj $(a + c) + i(b + d)$, a njihova razlika je $(a - c) + i(b - d)$.

Proizvod dva kompleksna broja $a + bi$ i $c + di$ je kompleksan broj $(ac - bd) + i(ad + bc) \rightarrow$ množi se "svaki sa svakim'' i vodimo računa da je $\boxed{i^2 = -1}$

Za $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$ je **konjugovano kompleksni broj.**

Dva kompleksna broja se **dele** tako što izvršimo racionalisanje sa konjugovanim brojem delioca.

$\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{a + bi}{c + di} \cdot \dfrac{c - di}{c - di} =$ gore množimo "svaki sa svakim'' a dole je razlika kvadrata.

$$= \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 - (di)^2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

Modul kompleksnog broja $z = a + bi$ je nenegativan broj $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$ su **jednaka** ako je $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$

Ovaj oblik se zove **trigonometrijski.** Ovde je **r- modul**, odnosno: $\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$, ugao φ se zove **argument kompleksnog broja**. Kako su sinx i cosx periodične funkcije kompleksni broj se može zapisati i kao :

$$z = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi))$$
$$k \in Z$$

Često se u zadacima radi lakšeg rešavanja koristi **Ojlerova formula:**

$\boxed{e^{xi} = \cos x + i\sin x}$

Množenje i deljenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku

Neka su data dva kompleksna broja u trigonometrijskom obliku:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Onda je :

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

Stepenovanje kompleksnog broja

Neka je dat kompleksni broj $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Onda je $\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$

Ako kompleksni broj ima modul 1, tj. ako je r = 1 onda je:

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \rightarrow$ **Moavrov obrazac**

Korenovanje kompleksnih brojeva:

Neka je dat $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Tada je:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = w = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})}$$

k- uzima vrednosti od 0 do n-1.

Sve vrednosti n-tog korena broja z, nalaze se na kružnici poluprečnika $\sqrt[n]{r}$.

Argumenti tih brojeva (vrednosti korena) čine aritmetički niz sa razlikom $d = \dfrac{2\pi}{n}$.

www.matematiranje.in.rs