POLINOMI NAD POLJEM KOMPLEKSNIH BROJEVA

Najprostije rečeno, polinom P je funkcija preslikavanja iz C u C a definisana je sa:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_o$$

Ako je $a \neq 0$, kazemo da je $n -$ stepen polinoma $P(z)$.

Dva polinoma $n -$ tog stepena:

$$P(z) = A_n Z^n + A_{n-1} Z^{n-1} + ... + A_1 Z + A_o$$
$$Q(z) = B_n Z^n + B_{n-1} Z^{n-1} + ... + B_1 Z + B_o$$

su indentički jednaki onda i samo onda ako je:

$$A_n = B_n, A_{n-1} = B_{n-1}, ..., A_o = B_o$$

Naravno i ovde važi Bezuova teorema koju smo već objasnili u običnim polinomima:
Pri deljenju polinoma $P(z)$ sa $(z-a)$ dobija se ostatak $P(a)$. Ako je a-koren polinoma, tj. $P(a)$ =0 onda je polinom $P(z)$ deljiv bez ostatka sa $(z-a)$

Osnovna teorema algebra je:

Svaki polinom P nad poljem kompleksnih brojeva ima bar jednu nulu.

Prva od posledica ove veoma bitne teoreme odnosi se na faktorizaciju polinoma.

<u>Primer</u>

$$\begin{aligned} z^2 + 1 &= z^2 - (-1) \\ &= z^2 - i^2 = (z-i)(z+i) \end{aligned}$$

→ **Svaki polinom $n -$ tog stepena može se napisati u obliku**

$$P(z) = a_n (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)...(z-\alpha_n)$$

gde su $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ koreni polinoma i a_n koeficijenat uz z^n.

→ **Ako je polinom P deljiv polinomom $Q(z) = (z-a)^k$, a nije deljiv polinomom $S(z) = (z-a)^{k+1}$, kažemo da je a <u>nula reda k</u> polinoma P.**

→ **Polinom P stepena n <u>ne može se</u> anulirati za više od n različitih vrednosti**

Primer

Ako su a,b i c medjusobno različiti brojevi, dokazati da je:

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$$

Rešenje:

Prebacićemo sve na levu stranu i napraviti polinom koji je očigledno stepena 2 (pa ne može imati više od 2 rešenja)

$$P(x)=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-1$$

Ako stavimo $x=a$ dobijamo

$$P(a)=\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(a-c)(a-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(a-a)(a-b)}{(c-a)(c-b)}-1$$
$$P(a)=1+0+0-1=0$$

Dakle, ***a*** je rešenje (nula, koren) ovog polinoma.

Slično je $P(b)=0$ i $P(c)=0$

Ovo znači da se polinom anulira **za tri različite vrednosti** i P(x) je zato nula polinom, tj.

$P(x)=0$ a odavde direktno "izlazi'' traženo tvrdjenje.

→ Polinom sa realnim koeficijentima neparnog stepena uvek ima bar jednu realnu nulu

Vietove formule

One predstavljaju vezu izmedju koeficijenta i nula polinoma. Pomoću njih se često mogu rešavati jednačine $P(x)=0$. Neka je dat polinom :

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o$$

I neka su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ koreni (nule, rešenja) date jednačine, tada je:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_n = (-1)^n \frac{a_o}{a_n}$$

<u>NAPOMENA:</u>

Već smo pominjali Vietove formule za kvadratnu jednačinu:

$ax^2+bx+c=0$ $\quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $\quad$ to jest $\quad a_2x^2 + a_1x + a_o = 0$ $\quad x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ $\quad x_1 \cdot x_2 = (-1)^2 \cdot \frac{a_o}{a_2}$

:

$x_1 \cdot x_2 = \frac{a_o}{a_2}$

Za polinom trećeg stepena (najšeće se pada u zadacima) bi bilo:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{a_o}{a_3}$$

PRIMERI

1) Odrediti parameter m i n tako da polinom $P(x)=x^4-3x^2+mx+n$ bude deljiv sa polinomom $P_1(x)=x^2-2x+4$

Rešenje:

$$(\cancel{x^4}-3x^2+mx+n):(x^2-2x+4)=x^2+2x$$
$$\underset{(-)}{}\cancel{x^4}\underset{(+)}{-}2x^3\underset{(-)}{+}4x^2$$
$$\cancel{2x^3}-7x^2+mx+n$$
$$-\cancel{2x^3}\mp 4x^2\pm 8x$$

Zastanimo malo da ovo lepo spakujemo pa nastavljamo dalje:

$$(-3x^2+(m-8)x+n):(x^2-2x+4)=-3$$
$$\underset{(+)}{-}3x^2\underset{(-)}{+}6x\underset{(+)}{-}12$$
$$(m-8)x-6x+n+12 \rightarrow \text{ i ovo sredimo}$$
$$(m-8-6)x+n+12=$$
$$(m-14)x+n+12=0$$

Ovo mora biti nula da ne bi bilo ostatka pri deljenju!

$$m-14=0 \quad\wedge\quad n+12=0$$
$$m=14 \qquad\qquad n=-12$$

2) Odrediti koeficijente a,b i c u polinomu $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tako da polinom bude deljiv binomima $x-1$ i x + 2 a da podeljen sa $x-4$ daje ostatak 18.

Rešenje:

Ako je polinom P(x) deljiv polinomom $x-1$ to znači da je $P(1)=0$,

slično je i $P(-2)=0$ a pošto je pri deljenju sa $x-4$ ostatak 18, to je $P(4)=18$

$$P(x)=x^3+ax^2+bx+c$$
$$P(1)=1^3+a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=\boxed{a+b+c+1=0} \quad \text{jer je } P(1)=0$$
$$P(-2)=(-2)^3+a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c=\boxed{4a-2b+c-8=0} \quad \text{jer je } P(-2)=0$$
$$P(4)=4^3+a\cdot 4^2+b\cdot 4+c=\boxed{16a+4b+c+64=18} \quad \text{jer je } P(4)=18$$

Dobili smo sistem jednačina:

$$a+b+c=-1$$
$$4a-2b+c=8$$
$$16a+4b+c=-46$$

Rešenja ovog sistema su:

$$a=-2 \qquad b=-5 \qquad c=6$$

pa je traženi polinom: $P(x)=x^3+2x^2-5x+6$

3) Odrediti realne parameter a, b i c tako da polinom $x^3 + ax^2 + bx - c$ bude deljiv sa $x - i$ a da podeljen sa $x + 1$ daje ostatak -5

Rešenje:

Pošto je polinom deljiv sa $x - i$ onda je on deljiv i sa $x + i$ pa i sa

$$(x - i)(x + i) = x^2 - i^2 = x^2 + 1$$

$$(\cancel{x^3} + ax^2 + bx - c) : (x^2 + 1) = x + a$$

$$\underset{(-)}{\cancel{x^3}} \underset{(-)}{+ x}$$

$$\cancel{ax^2} + (b-1)x + c$$

$$\underset{(-)}{\cancel{ax^2}} \underset{(-)}{+ a}$$

$(b-1)x + c - a \rightarrow$ **Ostatak koji mora biti nula!**

Dakle

$$b - 1 = 0 \qquad\qquad c - a = 0$$
$$\text{i}$$
$$b = 1 \qquad\qquad c = a$$

Drugi podatak da polinom deljen sa $x + 1$ daje ostatak -5 nam govori da je $P(-1) = -5$

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$
$$P(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + c = -5$$
$$-1 + a - b + c = -5$$
$$a - b + c = -4$$
$$a - 1 + c = -4$$
$$a + c = -3$$
$$a = c = -\frac{3}{2}$$

4) Znajući da je zbir dva korena $x_1 + x_2 = 1$ jednačine $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$, nadji parametar λ

Rešenje:
Upotrebićemo Vietove formule za jednačinu trećeg stepena:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{a_o}{a_3}$$

Kod nas iz $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ je:

$$a_3 = 2,\ a_2 = -1,\ a_1 = -7,\ a_o = \lambda$$

pa je :

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{-7}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{\lambda}{2}$$

U zadatku kaže da je $x_1 + x_2 = 1$ pa je $x_3 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{7}{2}$$

$$x_1x_2 + x_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + x_2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2}$$

$$x_1x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{7}{2}$$

$$x_1x_2 - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{7}{2}$$

$$x_1x_2 = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}$$

$x_1x_2 = -3$ a odavde je:

$$x_1x_2x_3 = -\frac{\lambda}{2}$$

$$-3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{3}{2} = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\boxed{\lambda = -3}$$