Nizovi-zadaci II deo

1.

Odrediti graničnu vrednost niza čiji je opšti član:

a) $a_n = \dfrac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}$

b) $a_n = \dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{2+4+6+...+(2n)}$

c) $a_n = \dfrac{1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+...+n\cdot(2n-1)}{1^2+2^2+3^2+...+n^2}$

Rešenje

Profesori najčešće dozvoljavaju da se za ove i slične zbirove koriste gotove formule. Njihovo dokazivanje se radi matematičkom indukcijom (pogledajte fajl kod nas).

Ali ima i profesora koji zahtevaju da se te formulice izvedu. Evo nekoliko ideja....

$1+2+3+...+n=?$

Postoji priča da je Gaus ovaj zbir našao još u I razredu osnovne škole, pa ćemo u čast njemu rešenje ovog zadatka zvati Gausova dosetka.

Stvar je ustvari vrlo prosta (ali se treba setiti) .

Označimo početni zbir slovom S.

$1+2+3+...+n=S$

On je okrenuo redosled brojeva, napisao ispod početnog zbira i sabrao te dve jednakosti:

$$\left.\begin{aligned} 1+2+3+...+n&=S\\ n+(n-1)+(n-2)+...+1&=S \end{aligned}\right\}+$$

$$\underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+...+(n+1)}_{(n+1)\text{ imamo na n mesta}}=2S$$

Dakle :

$$n\cdot(n+1)=2S$$

$$S=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$\boxed{1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$$

Sličan trik možemo primeniti i za zbir prvih n parnih ili neparnih brojeva:

$$2+4+6+...+2n=?$$

$$2+4+6+...+2n=S$$

$$2n+(2n-2)+(2n-4)+...+2=S$$

$$\left.\begin{array}{l} 2+4+6+...+2n=S \\ 2n+(2n-2)+(2n-4)+...+2=S \end{array}\right\}+$$

$$\underbrace{(2n+2)+(2n+2)+(2n+2)+...+(2n+2)}_{(2n+2)\text{ imamo na n mesta}}=2S$$

Odavde je :

$$n\cdot(2n+2)=2S \rightarrow 2n\cdot(n+1)=2S$$

$$S=\frac{2n\cdot(n+1)}{2}=n\cdot(n+1)$$

$$\boxed{2+4+6+...+2n=n\cdot(n+1)}$$

Za zbir prvih n neparnih brojeva bi bilo:

$$1+3+5+...+(2n-1)=?$$

$$1+3+5+...+(2n-1)=S$$

$$\underline{(2n-1)+(2n-3)+...+1=S}$$

$$2n+2n+...+2n=2S$$

$$2n\cdot n=2S$$

$$S=n^2$$

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$

U drugačijim situacijama ćemo koristiti neko trikče i neki od ova tri rezultata….

Recimo: $1^2+2^2+3^2+...+n^2=?$

Podjimo od formulice za kub binoma:

$(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$ a odavde je

$$\boxed{(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1}$$

Ovde ćemo redom stavljati umesto k vrednosti k=1,k=2,k=3,….,k=n

$$(2)^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$$
$$(3)^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$$
$$(4)^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1$$
....
$$(n)^3-(n-1)^3=3\cdot(n-1)^2+3\cdot(n-1)+1$$
$$(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$$

Sad **saberemo** sve ove jednakosti.Na levoj strani se potiru svi sem:

$$(n+1)^3-1^3=3\cdot(1^2+2^2+...+n^2)+3\cdot(1+2+...+n)+n\cdot1$$
$$n^3+3\cdot n^2+3n=3\cdot(1^2+2^2+...+n^2)+3\cdot(1+2+...+n)+n\cdot1$$

Iskoristimo da je $1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ i izrazimo ono što nam treba:

$$n^3+3\cdot n^2+3n=3\cdot(1^2+2^2+...+n^2)+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n...../*2$$
$$2n^3+6\cdot n^2+6n=6\cdot(1^2+2^2+...+n^2)+3\cdot n(n+1)+n2$$
$$6\cdot(1^2+2^2+...+n^2)=2n^3+6\cdot n^2+6n-3\cdot n^2-3\cdot n-2n$$
$$6\cdot(1^2+2^2+...+n^2)=2n^3-3\cdot n^2+n$$
$$6\cdot(1^2+2^2+...+n^2)=n(2n^2+3\cdot n+1)$$
$$6\cdot(1^2+2^2+...+n^2)=n(n+1)(2n+1)$$
$$\boxed{1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

U našim primerima se javlja i

$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+...+n\cdot(2n-1)=?$$

Ovaj zadnji član nam daje ideju šta treba raditi: $n\cdot(2n-1)=2n^2-n$

Ako primenimo ovo na svaki sabirak niza, dobijamo:

$$(2\cdot1-1)+(2\cdot2^2-2)+(2\cdot3^2-3)+...+(2\cdot n^2-n)=$$
$$2\cdot1+2\cdot2^2+2\cdot3^2+...+2\cdot n^2-1-2-3-....-n=$$
$$2\cdot(1+2^2+3^2+...+n^2)-(1+2+3+...+n)=$$

Iskoristimo formulice od malopre:

$$2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\frac{n\cdot(n+1)(2(2n+1)-3)}{6}=\frac{n\cdot(n+1)(4n-1)}{6}$$

Dakle:

$$\boxed{1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+...+n\cdot(2n-1)=\frac{n\cdot(n+1)(4n-1)}{6}}$$

Sad sa lakoćom, pošto znamo formule, možemo rešiti zadate primere:

a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+...+(2n-1)}{2+4+6+...+(2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=\frac{1}{1}=1$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+...+n\cdot(2n-1)}{1^2+2^2+3^2+...+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n\cdot(n+1)(4n-1)}{6}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\cancel{n\cdot(n+1)}\,(4n-1)}{\cancel{6}}}{\frac{\cancel{n(n+1)}\,(2n+1)}{\cancel{6}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{2n+1}=2$$

2.

Izračunati graniču vrednost niza:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+.......+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+.......+\frac{2}{n\cdot(n+1)(n+2)}\right)$

Rešenje:

a)

Ideja kod ovog tipa zadatka je da pokušamo da rastavimo sabirke.(Pogledajte fajl o integraciji racionalne funkcije, vezan za integrale)

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}$$ $\rightarrow$ Ovde su A i B konstante koje tražimo!

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}..............\,/*n\cdot(n+1)$$

$$1=A(n+1)+Bn$$

$$1=An+A+Bn$$

$1=n(A+B)+A\rightarrow$ Sad vršimo uporedjivanje, uz n, pa slobodne članove

$$A+B=0$$

$$A=1\rightarrow B=-1$$

Dakle:

$$\boxed{\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$$

Evo nama ideje kako razbijamo svaki član:

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+.......+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+....+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Svi unutrašnji članovi se potiru:

$$=\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+....+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+.......+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1$$

b)

$$\frac{2}{n\cdot(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}..................\,/*n\cdot(n+1)(n+2)$$

$$2=A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)$$

$$2=A(n^2+3n+2)+Bn^2+2Bn+Cn^2+Cn$$

$$2=An^2+3An+2A+Bn^2+2Bn+Cn^2+Cn$$

$$2=n^2(A+B+C)+n(3A+2B+C)+2A$$

$$A+B+C=0$$

$$3A+2B+C=0$$

$$\underline{2A=2}\rightarrow A=1$$

$$B+C=-1$$

$$\underline{2B+C=-3}$$

$$B=-2\rightarrow C=1$$

$$\frac{2}{n\cdot(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}$$

E sad je zgodno zadatak napisati preko sume:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+.......+\frac{2}{n\cdot(n+1)(n+2)}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k\cdot(k+1)(k+2)}$$

Primenimo razlaganje koje smo našli:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k\cdot(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}$$

Doteramo sve tri sume da budu oblika $\frac{1}{k}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}=\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}$$

Sada je :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k\cdot(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}+\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}$$

Dalje doteramo sve sume da kreću od k=3, a da se završavaju sa n

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}=\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$$

Vratimo se na zadatak:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}+\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}-2\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}\right)+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$$

Ovo malo prisredimo:

$$=1+\frac{1}{2}+\boxed{\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}}-1\boxed{-2\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}}-\frac{2}{n+1}+\boxed{\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$$

Primetimo da se sume potiru!

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$$

Sad pustimo limes:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

www.matematiranje.in.rs