Nizovi – zadaci (I deo)

1.

Odrediti granične vrednosti sledećih nizova:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n^2-5n+6}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-3n+12}{n^2-5}$

v) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-3n+2}{2n^2+4n+1}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{3-n^2}$

Rešenje:

Ovo je osnovni tip zadataka sa nizovima, u kojima se radi o racionalnoj funkciji.

Rešenje možemo odmah znati, po pravilima:

i) **Ako je najveći stepen gore u brojiocu veći od najvećeg stepena dole u imeniocu rešenje je** ∞

ii) **Ako je najveći stepen dole veći od najvećeg stepena gore, rešenje je 0**

iii) **Ako su najveći stepeni isti, rešenje je količnik brojeva ispred najvećih stepena.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n^2-5n+6}=0$ (pravilo **ii**) jer u imeniocu imamo n^2 a u brojiocu samo *n*

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-3n+12}{n^2-5}=\infty$ (pravilo **i**) , gore je polinom trećeg stepena a u imeniocu drugog stepena

v) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-3n+2}{2n^2+4n+1}=\dfrac{5}{2}$ (pravilo **iii**) , ovde su polinomi istog stepena

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{3-n^2}=\dfrac{1}{-1}=-1$ (pravilo **iii**) , polinomi su istog stepena , ispred n^2 u brojiocu je 1 a u imeniocu -1

Možda vaši profesori neće dozvoliti da koristite ova pravila , e onda morate da radite sve postupno!

Postoje dve ideje kako raditi ovakve primere.

<u>Jedna od ideja</u> je da se svaki sabirak podeli sa najvećim stepenom *n*-a.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n^2-5n+6}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}-\frac{5n}{n^2}+\frac{6}{n^2}}$ sve smo podelili sa n^2, jer je to najveći stepen ...sad pokratimo...

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n^2-5n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}+\frac{1}{n^2}}{\frac{2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}-\frac{5\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}+\frac{6}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}$$ dalje koristimo da je $\frac{A}{\infty}=0$, pa je

$\frac{3}{\infty}=0$, $\frac{1}{\infty}=0$, $\frac{5}{\infty}=0$, $\frac{6}{\infty}=0$ i dobijamo:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n^2-5n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}+\frac{1}{n^2}}{\frac{2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}-\frac{5\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}+\frac{6}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}=\frac{0+0}{2-0-0}=\frac{0}{2}=0$$

Ovaj postupak bi onda morali da primenjujemo za sve ostale zadatke, evo recimo pod

v)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-3n+2}{2n^2+4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n^2}{n^2}-\frac{3n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{4n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}-\frac{3\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}+\frac{2}{n^2}}{\frac{2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}+\frac{4\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}+\frac{1}{n^2}}=\frac{5-0+0}{2+0+0}=\frac{5}{2}$$

Neki profesori vole da izvučemo najveći stepen kao zajednički (**druga ideja**), pa bi to izgledalo:

v)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-3n+2}{2n^2+4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(5-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})}{n^2(2+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}(5-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})}{\cancel{n^2}(2+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2})}=\frac{5}{2}$$ jer izrazi $\frac{3}{n},\frac{2}{n^2},\frac{4}{n},\frac{1}{n^2}$ teže 0.

g)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{3-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\frac{1}{n^2})}{n^2(\frac{3}{n^2}-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}(1+\overset{\text{teži 0}}{\boxed{\frac{1}{n^2}}})}{\cancel{n^2}(\underset{\text{teži 0}}{\boxed{\frac{3}{n^2}}}-1)}=\frac{1}{-1}=-1$$

2.

Odrediti   granične vrednosti sledećih nizova:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-10n})$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$

v) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-10}{\sqrt{9n^2+8n+2}}$

Rešenje:

Kod zadataka sa korenima je česta ideja da se izvrši racionalizacija.

Najčešće koristimo (pravimo) razliku kvadrata, ali ako su u pitanju treći koreni, moramo raditi zbir ili razliku kubova.

a)

$$\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-10n})=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n^2-10n}}{1}\cdot\frac{n+\sqrt{n^2-10n}}{n+\sqrt{n^2-10n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-\sqrt{(n^2-10n)^2}}{n+\sqrt{n^2-10n}}$$

U brojiocu je očigledno razlika kvadrata . Moramo malo i imenilac da prisredimo,

odnosno da pod korenom izvučemo n^2 ispred zagrade pa zatim n ispred korena…

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-\sqrt{(n^2-10n)^2}}{n+\sqrt{n^2-10n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(n^2-10n)}{n+\sqrt{n^2(1-\frac{10}{n})}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n^2+10n}{n+n\cdot\sqrt{(1-\frac{10}{n})}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{10\cancel{n}}{\cancel{n}\cdot\left(1+\sqrt{1-\frac{10}{n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{\left(1+\sqrt{1-\frac{10}{n}}\right)}$$

Znamo da izraz $\dfrac{10}{n}\to 0$ teži nuli kad $n\to\infty$, pa je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10}{\left(1+\sqrt{1-\frac{10}{n}}\right)}=\frac{10}{\left(1+\sqrt{1-0}\right)}=\frac{10}{1+1}=\frac{10}{2}=5$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{1}\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n^2+1)^2}-n^2}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1-n^2}{n\cdot\sqrt{(1+\underbrace{\boxed{\frac{1}{n^2}}}_{\text{teži 0}})}+n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot 1+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2\cdot\infty}=0$$

v)

U ovom primeru ne moramo raditi racionalizaciju, jer je u imeniocu koren bez plus ili minus neki broj.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-10}{\sqrt{9n^2+8n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n(1-\frac{10}{3n})}{\sqrt{9n^2(1+\frac{8}{9n}+\frac{2}{9n^2})}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{3n}(1-\overbrace{\boxed{\frac{10}{3n}}}^{\text{teži 0}})}{\cancel{3n}\sqrt{(1+\underbrace{\boxed{\frac{8}{9n}}}_{\text{teži 0}}+\underbrace{\boxed{\frac{2}{9n^2}}}_{\text{teži 0}})}}=\frac{1}{1}=1$$

3.

Odrediti granične vrednosti sledećih nizova:

a) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2})$

b) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n)$

Rešenje:

a)

Koristimo $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$ razlika kubova

Ovde imamo izraz $\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2}$, a to nam je ustvari *(A - B)*.

Moramo dodati (A^2+AB+B^2) , to jest, pošto je *A=*$\sqrt[3]{n+2}$ a *B=*$\sqrt[3]{n-2}$ racionališemo sa

$$\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^2+\sqrt[3]{n+2}\cdot\sqrt[3]{n-2}+\left(\sqrt[3]{n-2}\right)^2$$

Da se vratimo na zadatak:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2})=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2})\cdot\frac{\left(\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^2+\sqrt[3]{n+2}\cdot\sqrt[3]{n-2}+\left(\sqrt[3]{n-2}\right)^2\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^2+\sqrt[3]{n+2}\cdot\sqrt[3]{n-2}+\left(\sqrt[3]{n-2}\right)^2\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{n-2}\right)^3}{\left(\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^2+\sqrt[3]{n+2}\cdot\sqrt[3]{n-2}+\left(\sqrt[3]{n-2}\right)^2\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2-n+2}{\left(\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^2+\sqrt[3]{n+2}\cdot\sqrt[3]{n-2}+\left(\sqrt[3]{n-2}\right)^2\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\left(\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^2+\sqrt[3]{n+2}\cdot\sqrt[3]{n-2}+\left(\sqrt[3]{n-2}\right)^2\right)}=\frac{4}{\infty+\infty+\infty}=\frac{4}{\infty}=0$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n)=?$$

Vršimo racionalizaciju sličnu kao u prethodnom primeru:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n)=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n)\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right)^2+\sqrt[3]{n^3+2n^2}\cdot n+n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right)^2+\sqrt[3]{n^3+2n^2}\cdot n+n^2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right)^3-n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right)^2+\sqrt[3]{n^3+2n^2}\cdot n+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2-n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right)^2+\sqrt[3]{n^3+2n^2}\cdot n+n^2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right)^2+\sqrt[3]{n^3+2n^2}\cdot n+n^2}=$$

Sad nam je posao da i imenilac prisredimo !

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{\left(\sqrt[3]{n^6+4n^5+4n^4}\right)+\sqrt[3]{n^3+2n^2}\cdot n+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{\sqrt[3]{n^6(1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2})}+\sqrt[3]{n^3(1+\frac{2}{n})}\cdot n+n^2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2\cdot\sqrt[3]{(1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2})}+n\cdot\sqrt[3]{(1+\frac{2}{n})}\cdot n+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\cdot[\sqrt[3]{(1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2})}+\sqrt[3]{(1+\frac{2}{n})}+1]}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{[\sqrt[3]{(1+0+0)}+\sqrt[3]{(1+0)}+1]}=\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}$$

4.

Odrediti sledeće granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$;

v) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+1)-\ln n)$;

Rešenje:

U sledećim zadacima ćemo koristiti:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e} \qquad \text{i} \qquad \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{an}\right)^{an}=e}$$

a)

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=$ ovde gde je 3 mora biti 1, pa ćemo 3 ”spustiti ” ispod n

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^n=$ sad kod n u eksponentu pomnožimo i podelimo sa 3,jer nam treba $\frac{n}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}\cdot 3}=\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}}^3=e^3$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \textbf{trik: u zagradi ćemo dodati 1 i oduzeti 1} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n-1}-1\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\underbrace{\boxed{\frac{n+1}{n-1}-1}}_{\text{Ova dva sredimo}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1-1(n-1)}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1-n+1}{n-1}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n = \text{spustimo 2 ispod n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^n =$$

$$= \text{u izložiocu dodamo } \frac{n-1}{2} \text{ koje nam treba,ali moramo i suprotno } \frac{2}{n-1} =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2n}{n-1}} = \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}}^{\frac{2n}{n-1}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2n}{n-1}} =$$

$$= e^x \text{ je neprekidna funkcija pa sme da zameni mesto sa limesom} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n-1}} = e^2 \text{ jer je}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n(1-\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1-\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\text{ovo je 0}})} = 2$$

v)

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot(\ln(n+1)-\ln n) = \text{Znamo da za logaritme ima pravilo lnA-lnB=ln}\frac{A}{B}$$

$$=\lim_{n\to\infty}[n\cdot\ln\frac{n+1}{n}] = \text{Važi i pravilo n}\cdot\text{lnA=lnA}^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

(pošto je lnx neprekidna funkcija i ona može da zameni mesto sa lim)

$$\ln\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \ln\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)^n = \ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln\underbrace{\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}_{\text{Ovo je e}} = \ln e = 1$$