# NIZOVI

Bilo koje preslikavanje skupa svih prirodnih brojeva *N* u neki neprazan skup *S* naziva se *niz*.

Niz je dakle preslikavanje kojim se :

prirodnom broju 1 dodeljuje njegova slika $a_1 \in S$

prirodnom broju 2 dodeljuje njegova slika $a_2 \in S$

prirodnom broju 3 dodeljuje njegova slika $a_3 \in S$

………..

prirodnom broju n dodeljuje njegova slika $a_n \in S$

…………itd.

Mi najčešće niz predstavljamo kao slike: $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...) = (a_n)$ (kraći zapis)

Za element $a_n$ kažemo da je opšti član niza ( a taj je nama i najznačajniji jer se često niz zadaje samo preko svog opšteg člana)

**PRIMER 1.**

Napisati prvih 5 članova niza zadatih svojim opštim članom:

a) $a_n = 3 + (-1)^n$

b) $b_n = \dfrac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2}$

**Rešenje:**

a)

$a_n = 3 + (-1)^n$

Prvi član niza nalazimo za n=1, pa je $a_1 = 3 + (-1)^1 = 3 - 1 = 2$

Drugi član niza nalazimo za n=2, pa je $a_2 = 3 + (-1)^2 = 3 + 1 = 4$

Treći član niza nalazimo za n=3, pa je $a_3 = 3 + (-1)^3 = 3 - 1 = 2$

Četvrti član će biti za n=4, to jest $a_4 = 3 + (-1)^4 = 3 + 1 = 4$

Peti član , za n=5, je $a_5 = 3 + (-1)^5 = 3 - 1 = 2$

b)

$$b_n = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}$$

Prvi član niza nalazimo za n=1, pa je $b_1 = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$

Drugi član niza nalazimo za n=2, pa je $b_2 = \frac{\sin\frac{2\pi}{2}}{2^2} = \frac{\sin\pi}{4} = \frac{0}{4} = 0$

Treći član niza nalazimo za n=3, pa je $b_3 = \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3^2} = \frac{-1}{9} = -\frac{1}{9}$

Četvrti član će biti za n=4, to jest $b_4 = \frac{\sin\frac{4\pi}{2}}{4^2} = \frac{\sin 2\pi}{16} = \frac{0}{16} = 0$

Peti član , za n=5, je $b_5 = \frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{5^2} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{25} = \frac{1}{25}$

**PRIMER 2.**

Odrediti opšti član niza:

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, .......$

b) $0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, .......$

c) 1,3,7,15,31,.......

**Rešenje:**

a)

E ovo je već malo zeznutija situacija....

Mora malo da se razmišlja!

Naš niz glasi $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},.......$

Primećujemo da se broj u brojiocu poklapa sa članom niza o kome se radi:

$a_1=\frac{\boxed{1}}{2},a_2=\frac{\boxed{2}}{3},a_3=\frac{\boxed{3}}{4},a_4=\frac{\boxed{4}}{5},.......$ Dakle taj gornji broj je n.

Dalje primećujemo da je broj u imeniocu za 1 veći od broja u brojiocu, pa ćemo njega obeležiti sa n+1

Sad možemo zaključiti da je opšti član niza $\boxed{a_n=\frac{n}{n+1}}$

b)

Niz glasi $0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{5},.......$

Primećujemo da su članovi na neparnim mestima 0, dakle $a_1=a_3=a_5=....=0$

Problem je dakle opisati članove na parnim mestima!

$a_2=\frac{1}{3},$

$a_4=\frac{1}{4},$

$a_6=\frac{1}{5},$

.......

Brojilac nije problem, tu je sigurno 1.

Razmišljamo šta je sa imeniocem:

Za n=2, dole je 3, a ideja je $3=\frac{2}{2}+2\rightarrow\frac{n}{2}+2$

Za n=4, dole je 4, a $4=\frac{4}{2}+2\rightarrow\frac{n}{2}+2$

Za n=6, dole je 5, itd. a $5=\frac{6}{2}+2\rightarrow\frac{n}{2}+2$

Zaključujemo da članove na parnim mestima možemo zapisati kao $a_n=\frac{1}{\frac{n}{2}+2}$

E sad za ceo niz će biti $a_n = \begin{cases} 0, \text{ za } n = 2k-1 \\ \dfrac{1}{\frac{n}{2}+2}, \text{ za } n = 2k \end{cases}$

c)

1,3,7,15,31.....

Da bi opisali ovaj niz, poći ćemo od poznatijeg: 1,4,8,16,32,....to jest $1, 2^2, 2^3, 2^4, .......$

Ovo je ustvari niz $2^n$, a kako su naši članovi za po 1 ( počevši od drugog) manji od odgovarajućih članova ovog niza, zaključujemo da je opšti član našeg niza $\boxed{a_n = 2^n - 1}$

**PRIMER 3.**

Niz je dat rekurentnom formulom, odrediti opšti član niza.

a) $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ i $a_0 = 2,\ a_1 = 3$
b) $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$ i $a_0 = 1,\ a_1 = 3$

**Rešenje:**

U ovakvoj situaciji, kad je niz dat rekurentnom formulom, najpre ,,pridružimo`` kvadratnu jednačinu

$a_{n+1} \to r^2$
gde je $a_n \to r$ i nadjemo rešenje te kvadratne jednačine .
$a_{n-1} \to 1$

Ako su rešenja različita $r_1 \neq r_2$ tada je opšti član oblika $a_n = C \cdot (r_1)^n + D \cdot (r_2)^n$

Ako su rešenja ista $r_1 = r_2$, onda je opšti član oblika $a_n = C \cdot (r_1)^n + D \cdot n \cdot (r_1)^n$

Naravno, C i D su konstante koje tražimo za zadate vrednosti $a_0$ i $a_1$

Da vidimo to konkretno na našem primeru....

a)

$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ i $a_0 = 2,\ a_1 = 3$

Iz $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ dobijamo $r^2 = 3r - 2$ pa rešimo ovu kvadratnu jednačinu:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \to r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \to r_1 = 2, r_2 = 1$$

Sad znamo da je opšte rešenje oblika:

$$a_n = C\cdot(r_1)^n + D\cdot(r_2)^n$$
$$a_n = C\cdot(2)^n + D\cdot(1)^n$$
$$a_n = C\cdot 2^n + D\cdot 1$$

Dalje tražimo vrednosti za konstante C i D:

$$a_n = C\cdot 2^n + D$$
$$a_0 = 2 \rightarrow C\cdot 2^0 + D = 2 \rightarrow \boxed{C+D=2}$$
$$a_1 = 3 \rightarrow C\cdot 2^1 + D = 3 \rightarrow \boxed{2C+D=3}$$

Rešimo ovaj sistem jednačina I dobijamo C=1 i D=1 pa je $a_n = C\cdot 2^n + D \rightarrow \boxed{a_n = 2^n + 1}$ rešenje!

b)

$a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$ i $a_0 = 1,\ a_1 = 3$

$a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$ pridružimo kvadratnu jednačinu $r^2 = 4r - 4$ to jest $r^2 - 4r + 4 = 0$ gde je $r_1 = r_2 = 2$

Sad imamo situaciju da je $a_n = C\cdot(r_1)^n + D\cdot n\cdot(r_1)^n$ to jest $a_n = C\cdot 2^n + D\cdot n\cdot 2^n = (C + D\cdot n)\cdot 2^n$

Dalje tražimo vrednosti za konstante C i D:

$$a_n = (C + D\cdot n)\cdot 2^n$$
$$a_0 = 1 \rightarrow (C + D\cdot 0)\cdot 2^0 = 1 \rightarrow C = 1$$
$$a_1 = 3 \rightarrow (C + D\cdot 1)\cdot 2^1 = 3 \rightarrow (1+D)\cdot 2 = 3 \rightarrow 1 + D = \frac{3}{2} \rightarrow D = \frac{1}{2}$$
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\cdot n\right)\cdot 2^n$$

---

# Monotonost nizova

Niz $(a_n)$ je monotono rastući ( rastući ) ako za svako $n \in N$ važi $a_{n+1} > a_n$

Niz $(a_n)$ je monotono opadajući ( opadajući ) ako za svako $n \in N$ važi $a_{n+1} < a_n$

Niz $(a_n)$ je monotono neopadajući ( neopadajući ) ako za svako $n \in N$ važi $a_{n+1} \geq a_n$

Niz $(a_n)$ je monotono nerastući ( nerastući ) ako za svako $n \in N$ važi $a_{n+1} \leq a_n$

Ovo su definicije....Da vidimo jedan konkretan primer.

**PRIMER 4.**

Ispitati monotonost nizova

a) $\frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{12}{13}, .......$

b) $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, .......$

**Rešenje:**

Naravno , Vi ćete pomisliti da je ovo lak posao jer recimo kod niza $\frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{12}{13}, .......$ se jasno vidi da je svaki sledeći član veći od prethodnog, pa je on rastući. Većina profesora Vam to neće priznati!

Prvi posao nam je da nadjemo opšti član niza, a zatim da ispitamo na osnovu njega da li raste ili opada.

a)

$$a_1 = \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 1}{4}$$
$$a_2 = \frac{6}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7}$$
$$a_3 = \frac{9}{10} = \frac{3 \cdot 3}{10}$$
$$a_4 = \frac{12}{13} = \frac{3 \cdot 4}{13}$$

Vidimo da je brojilac oblika 3n, a imenilac opisujemo kao 3n+1 (veći za 1 od brojioca).

Dakle, opšti član je oblika $a_n = \frac{3n}{3n+1}$, a onda je $a_{n+1} = \frac{3(n+1)}{3(n+1)+1} = \frac{3n+3}{3n+4}$

Dalje tražimo $a_n - a_{n+1}$ pa ako je $a_n - a_{n+1} > 0$ niz je opadajući, a ko je $a_n - a_{n+1} < 0$ rastući je!

$$a_n - a_{n+1} = \frac{3n}{3n+1} - \frac{3n+3}{3n+4} = \frac{3n\cdot(3n+4)-(3n+3)\cdot(3n+1)}{(3n+1)(3n+4)}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{9n^2+12n-9n^2-3n-9n-3}{(3n+1)(3n+4)}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{-3}{(3n+1)(3n+4)}$$

Sad razmišljamo da li je ovo veće ili manje od 0.

$(3n+1)(3n+4)$ je sigurno pozitivno jer n kreće od 1, pa 2 ....itd a oba činioca su pozitivna, a kako je u brojiocu -3, zaključujemo da je $a_n - a_{n+1} < 0$, to jest da je niz rastući!

b)

$$1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, .......$$

$$a_1 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{2\cdot 1-1}$$

$$a_2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{2\cdot 2-1}$$

$$a_3 = \frac{3}{5} = \frac{3}{2\cdot 3-1}$$

$$a_4 = \frac{4}{7} = \frac{4}{2\cdot 4-1}$$

....

$$\boxed{a_n = \frac{n}{2n-1}} \rightarrow a_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)-1} \rightarrow \boxed{a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1}}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{2n-1} - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{n\cdot(2n+1)-(n+1)\cdot(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2n^2+n-2n^2+n-2n+1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{4n^2-1}$$

Izraz u imeniocu je sigurno pozitivan, a kako je u brojiocu 1, zaključujemo da je $a_n - a_{n+1} > 0$ to jest da je niz opadajući!