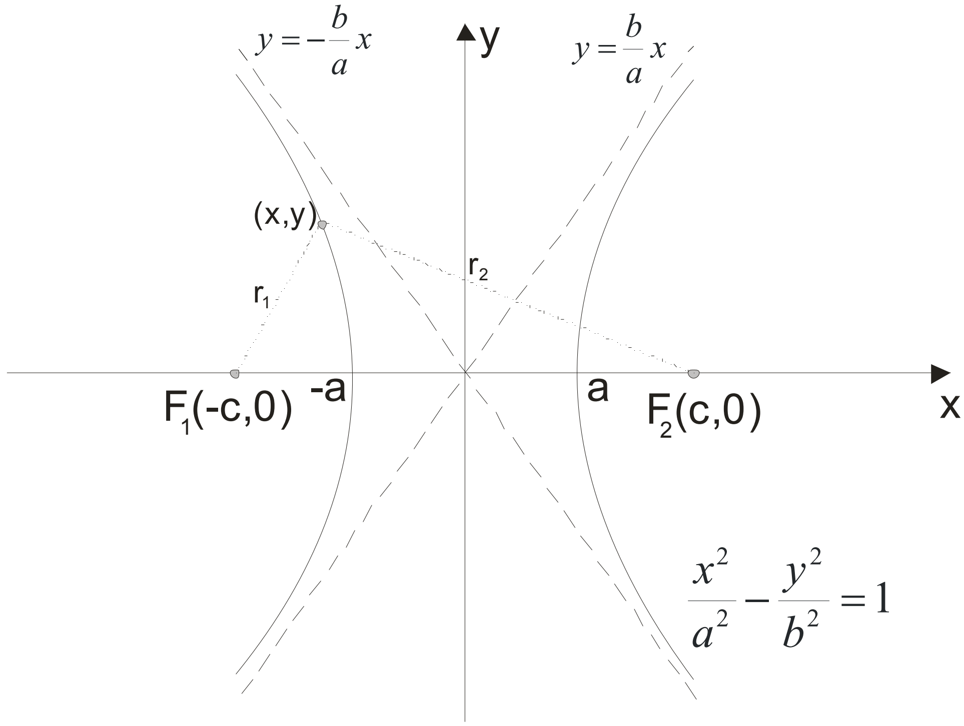
HIPERBOLA

Hiperbola je skup tačaka u ravni s osobinom da je razlika rastojanja ma koje tačke od dveju datih tačaka stalan broj.



a - je realna poluosa (2a je realna osa)

b - je imaginarna poluosa (2b je imaginarna osa)

r_1, r_2 su potezi (radijus vektori) i za njih važi $|r_1 - r_2| = 2a$

$F_1(-c,0), F_2(c,0)$ su žiže hiperbole , gde je $c^2 = a^2 + b^2$

$e = \frac{c}{a}$ je ekscentricitet (još kod hiperbole važi da je e >1)

prave $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$ su asimptote hiperbole

Glavna jednačina hiperbole je $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ ili $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

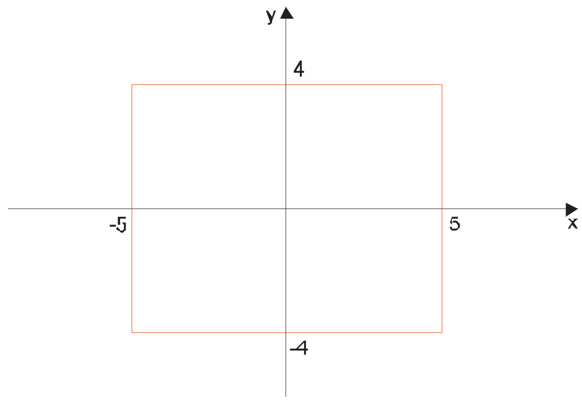
Kako nacrtati datu hiperbolu?

Na primer trebamo nacrtati hiperbolu $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

Uporedjujući je sa opštom jednačinom $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ zaključujemo da je $a^2=25$ i $b^2=16$

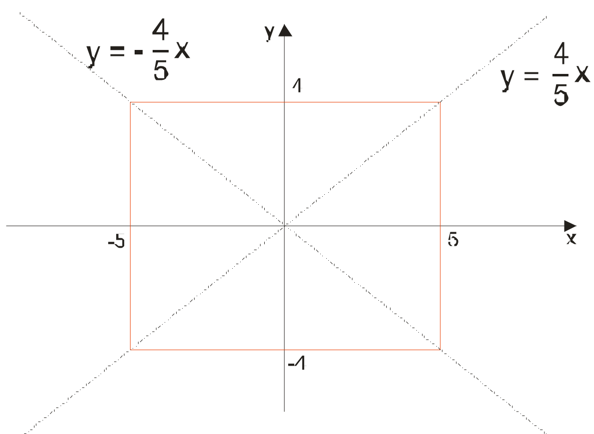
Odavde je jasno da je $a=\pm 5$ i $b=\pm 4$

Nacrtamo pravougaonik:

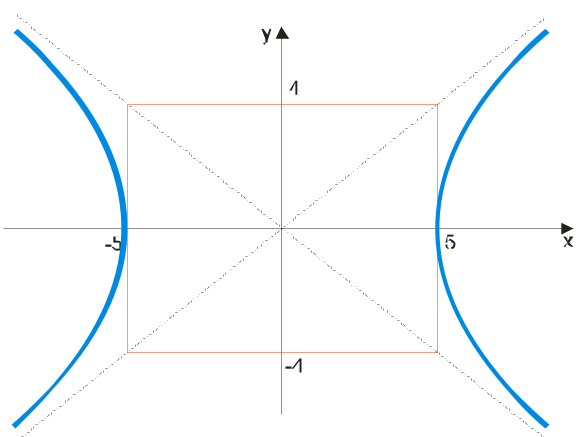


Asimptote su prave $y=\frac{b}{a}x$ i $y=-\frac{b}{a}x$,odnosno za naš primer $y=\frac{4}{5}x$ i $y=-\frac{4}{5}x$.

Na grafiku asimptote sadrže dijagonale ovog pravougaonika:



Sad nacrtamo hiperbolu:



<u>Primer 1.</u>

Odrediti jednačinu hiperbole ako je razmera njenih poluosa 3 : 4   i c = 15

Rešenje:

Upotrebićemo “trik sa k”

$b : a = 3 : 4$

$b = 3k$ i $c^2 = a^2 + b^2$ pa je

$a = 4k$

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = (4k)^2 + (3k)^2$$
$$15^2 = 16k^2 + 9k^2$$
$$225 = 25k^2$$
$$k^2 = \frac{225}{25}$$
$$k^2 = 9$$
$$k = 3$$

Vratimo se da nađemo a i b.

$$b = 3k = 3 \cdot 3 = 9 \rightarrow b^2 = 81$$
$$a = 4k = 4 \cdot 3 = 12 \rightarrow a^2 = 144$$

Pa je hiperbola:

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1$$

Primer 2.

Odrediti jednačinu hiperbole ako je rastojanje između žiža jednako $10\sqrt{2}$ *, a jednačine njenih asimptota su* $y = \pm\frac{3}{4}x$

Rešenje:

Rastojanje između žiža je $2c = 10\sqrt{2}$ pa je $c = 5\sqrt{2}$.

$y = \pm\frac{3}{4}x$ uporedimo sa $y = \pm\frac{b}{a}x$ i dobijamo $\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \rightarrow b = \frac{3}{4}a$

Ovo zamenimo u $c^2 = a^2 + b^2$

$(5\sqrt{2})^2 = a^2 + (\frac{3}{4}a)^2$

$50 = a^2 + \frac{9}{16}a^2$

$50 = \frac{25}{16}a^2$

$a^2 = 32$

onda je

$b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = 50 - 32$

$b^2 = 18$

Jednačina tražene hiperbole je $\boxed{\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} = 1}$

Prava i hiperbola

Slično kao kod kružnice i elipse , da bi odredili međusobni položaj prave i hiperbole, rešavamo sistem jednačina:

$y = kx + n$ i $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

- Ako sistem nema rešenja , onda se prava i hiperbola ne seku, to jest $a^2k^2 - b^2 < n^2$

- Ako sistem ima dva rešenja, onda prava seče hoperbolu u dvema tačkama $a^2k^2 - b^2 > n^2$

- Ako sistem ima jedno rešenje, prava je tangenta hiperbole i zadovoljava USLOV DODIRA:

$$a^2k^2 - b^2 = n^2$$

Napomena

Ako nam traže tangentu hiperbole u datoj tački (x_0, y_0) na hiperboli , onda imamo gotovu formulu:

$$t: \frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

Primer 3.

Napisati jednačinu tangente hiperbole $x^2 - y^2 = 40$ *u tački M(x,9) koja je na hiperboli.*

Rešenje:

Najpre ćemo odrediti koordinatu x tačke M tako što u jednačini hiperbole zamenimo y sa 9.

$$x^2 - y^2 = 40$$
$$x^2 - 9^2 = 40$$
$$x^2 = 40 + 81$$
$$x^2 = 121$$
$$x = 11 \vee x = -11$$

Dakle imamo dve tačke koje zadovoljavaju (-11,9) i (11,9)

$x^2 - y^2 = 40$ sve podelimo sa 40

$$\frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{40} = 1$$

Koristimo dalje gotovu formulicu $t: \frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$

Imaćemo dva rešenja, jer smo našli dve tačke:

$$t_1: \frac{x \cdot (-11)}{40} - \frac{y \cdot 9}{40} = 1 \qquad t_2: \frac{x \cdot 11}{40} - \frac{y \cdot 9}{40} = 1$$
$$t_1: -11x - 9y = 40 \qquad t_2: 11x - 9y = 40$$
$$t_1: -11x - 9y - 40 = 0 \qquad t_2: 11x - 9y - 40 = 0$$

Primer 4.

Napisati jednačinu hiperbole ako su poznate jednačine njenih tangenti : 5x-7y-1=0 i x-y-1=0

Rešenje:

Tangente moraju da zadovoljavaju uslov dodira. Zato ćemo obe prave prebaciti u eksplicitni oblik da bi mogli pročitati njihove k i n koje menjamo u uslov dodira.

$$5x-7y-1=0$$
$$-7y=-5x+1......./:(-7)$$
$$y=\frac{5}{7}x-\frac{1}{7}$$
$$k=\frac{5}{7}$$
$$n=-\frac{1}{7}$$

i

$$x-y-1=0$$
$$-y=-x+1$$
$$y=x-1$$
$$k=1$$
$$n=-1$$

$$a^2k^2-b^2=n^2$$
$$a^2(\frac{5}{7})^2-b^2=(-\frac{1}{7})^2$$
$$a^2\frac{25}{49}-b^2=\frac{1}{49}$$
$$25a^2-49b^2=1$$

i

$$a^2k^2-b^2=n^2$$
$$a^2 1^2-b^2=(-1)^2$$
$$a^2-b^2=1$$

Sad napravimo sistem :

$$a^2-b^2=1$$
$$\underline{25a^2-49b^2=1}$$
$$a^2=b^2+1$$
$$25(b^2+1)-49b^2=1$$
$$25b^2+25-49b^2=1$$
$$-24b^2=-24$$
$$b^2=1\to a^2=b^2+1\to a^2=2$$

pa je tražena hiperbola $\boxed{\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{1}=1}$

Primer 5.

Odrediti ugao pod kojim se seku krive $3x^2+4y^2=84$ *i* $3x^2-4y^2=12$.

Rešenje:

Najpre nađemo tačke preseka rešavajući sistem jednačina

$$\left.\begin{aligned} 3x^2+4y^2&=84 \\ 3x^2-4y^2&=12 \end{aligned}\right\}+$$

$$6x^2=96$$

$$x^2=16$$

$$x_1=4\rightarrow 3\cdot 4^2+4y^2=84\rightarrow 4y^2=84-48\rightarrow 4y^2=36\rightarrow y^2=9\rightarrow y=\pm 3$$

$$x_2=-4\rightarrow 3\cdot(-4)^2+4y^2=84\rightarrow 4y^2=84-48\rightarrow 4y^2=36\rightarrow y^2=9\rightarrow y=\pm 3$$

Preseci su u :

$(4,3);(4,-3);(-4,3);(-4,-3)$

Ugao pod kojim se seku krive je ustvari ugao između tangenata u jednoj od tačaka preseka!

Uzećemo tačku (4,3) i u njoj postaviti tangente na elipsu i na hiperbolu...

$$t_e:\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}=1 \qquad \text{i} \qquad t_h:\frac{x\cdot x_0}{a^2}-\frac{y\cdot y_0}{b^2}=1$$

$3x^2+4y^2=84$ sve podelimo sa 84

$$\frac{3x^2}{84}+\frac{4y^2}{84}=1$$

$$\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{21}=1$$

$$\frac{x\cdot 4}{28}+\frac{y\cdot 3}{21}=1$$

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{7}=1$$

$$x+y=7$$

$$y=-x+7$$

$$k_1=-1$$

$3x^2-4y^2=12$ sve podelimo sa 12

$$\frac{3x^2}{12}-\frac{4y^2}{12}=1$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$$

$$\frac{x\cdot 4}{4}-\frac{y\cdot 3}{3}=1$$

$$x-y=1$$

$$y=x-1$$

$$k_2=1$$

Možemo upotrebiti formulu za ugao između dve prave, ali možemo i odmah zaključiti da se seku pod uglom od 90^0.

Kako?

Pa znamo da je uslov normalnosti $k_1\cdot k_2=-1$ a to je očigledno zadovoljeno!