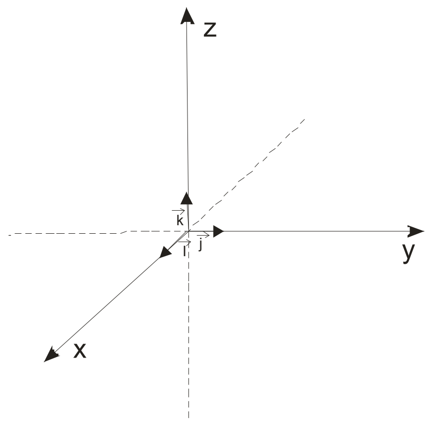
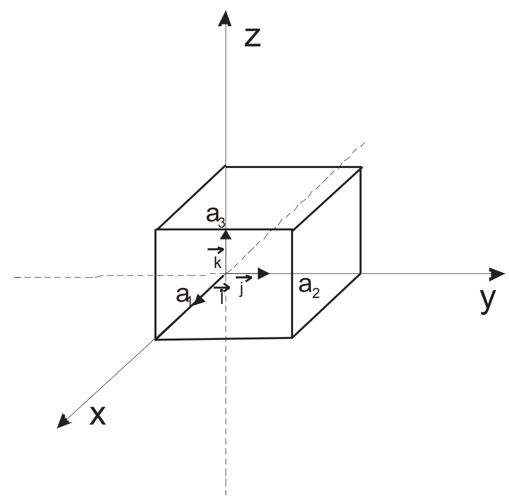
Na x,y i z osi uočimo jedinične vektore (ortove) $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$





$\vec{i} = (1,0,0)$

$\vec{j} = (0,1,0)$ Svaki vektor $\vec{a}$ u prostoru predstavljamo: $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ ili $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{k} = (0,0,1)$

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

Intezitet vektora $\vec{a}$ je $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Jedinični vektor vektora a je vektor $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Ako imamo dve tačke A i B u prostoru, vektor $\vec{AB}$ se "pravi":

$$A(x_1, y_1, z_1) \longrightarrow B(x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Skalarni proizvod (•)

Neka su dati vektori

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Tada je:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b})}$$

Ako nemamo dat ugao izmedju vektora: $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$

Ugao izmedju dva vektora:

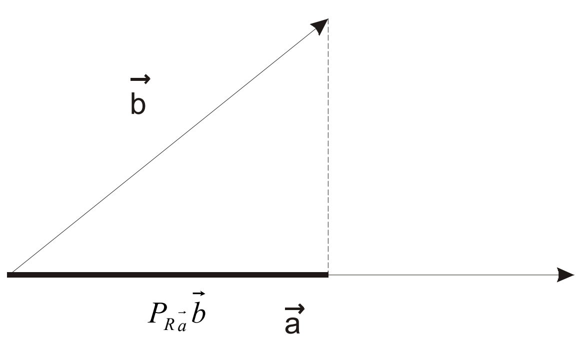
$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Uslov normalnosti:

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$$

Projekcija vektora : $P_{R_{\vec{a}}} \vec{b}$ je projekcija vektora $\vec{b}$ na pravac vektora $\vec{a}$ i obrnuto :

$P_{R_{\vec{b}}} \vec{a}$ je projekcija vektora $\vec{a}$ na $\vec{b}$



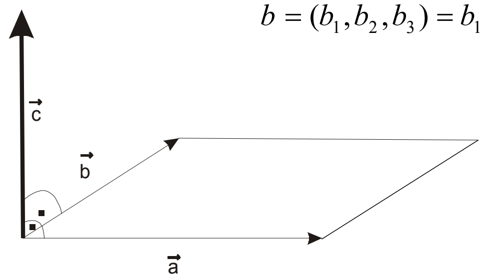
$$P_{R_{\vec{a}}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|} \quad \text{i} \quad P_{R_{\vec{b}}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

www.matematiranje.in.rs

Vektorski proizvod ($\vec{a} \times \vec{b}$)

Neka su dati vektori

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$
$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$$



$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ Pazi: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$

1) Vektor ***c*** je normalan i na vektor **a** i na vektor ***b***

2) Intenzitet vektora ***c*** je brojno jednak površini paralelograma nad vektorima **a** i ***b***

3) Smer vektora ***c*** se odredjuje pravilom desnog triedra(desnog zavrtnja)

Intenzitet vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ je: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako je njihov vektorski proizvod jednak $\vec{0}$.

Konkretno:

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ = razvijemo ovu determinantu i (na primer) dobijemo $= \#\vec{i} + \$\vec{j} + \&\vec{k}$ gde su

#, \$, & neki brojevi.

Tada je $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\#^2 + \$^2 + \&^2}$

Površina paralelograma nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je $P = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Dok površinu trougla računamo (logično) kao polovinu površine paralelograma:

$$P_\Delta = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Mešoviti proizvod tri vektora

Mešoviti proizvod je $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}$. Najčešće se obeležava sa $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$. Dakle : $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$

Kako se on izračunava?

Ako su vektori zadati sa: $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ i $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ onda je:

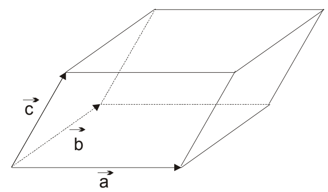
$$(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

A dobijenu determinantu rešavamo ili razvijanjem po nekoj vrsti (koloni) ili pomoću Sarusovog pravila.

Čemu služi mešoviti proizvod?

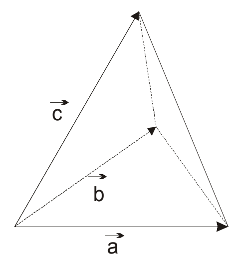
i) Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda tri nekomplanarna vektora jednaka je zapremini paralelopipeda

konstruisanog nad njima, to jest : $V(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|$



ii) Zapremina trostrane piramide (tetraedra) konstruisane nad nekomplanarnim vektorima a,b,c,je:

$$V=\frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|$$



Zašto $\frac{1}{6}$ u formuli ?

Još od ranije znamo da se zapremina piramide računa po formuli: $V=\frac{1}{3}B\,H$

Kako je baza trougao , njegovu površinu računamo kao : $B=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$, pa je onda:

$$V=\frac{1}{3}B\,H=\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|H=\frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|$$

Napomena: Često se u zadacima traži visina H neke piramide. Nju ćemo naći tako što najpre nađemo zapreminu preko formule $\frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, zatim nadjemo bazu $B=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ pa to zamenimo u $H=\frac{3V}{B}$.

iii) Uslov komplanarnosti

Vektori $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ su komplanarni ako i samo ako je njihov mešoviti proizvod jednak nuli.

Dakle uslov komplanarnosti je : $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$

www.matematiranje.in.rs