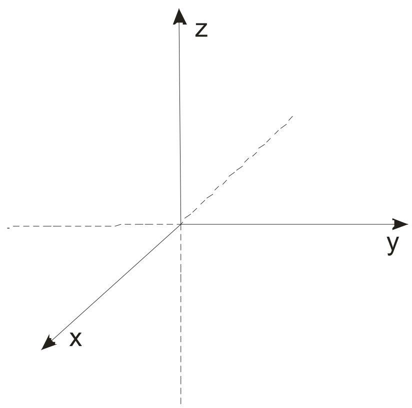
VEKTORI U PROSTORU (I deo)

Najbolje je da pre nego što počnete da proučavate vektore u prostoru pogledate fajl "vektori u ravni" jer se mnoge stvari "prenose" i u prostor.

Pogledajmo najpre kako nastaje Dekartov pravougli trijedar.

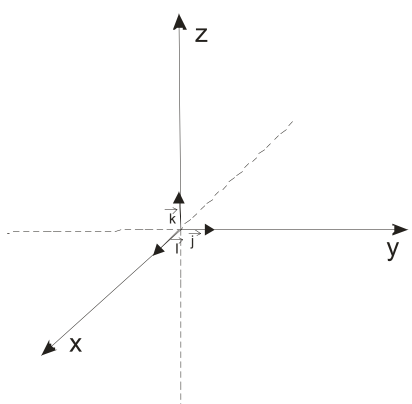
Kroz jednu tačku O postavimo tri numeričke prave (brojne ose) normalne jedna na drugu.



x-osa → Apscisna osa
y-osa → Ordinatna osa
z-osa → Aplikatna osa
Tačka O → kordinatni početak

Po dve koordinatne ose čine koordinatne ravni (xOy, xOz i yOz) normalne jedna na drugu.

Na x,y i z osi uočimo jedinične vektore (ortove) $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$

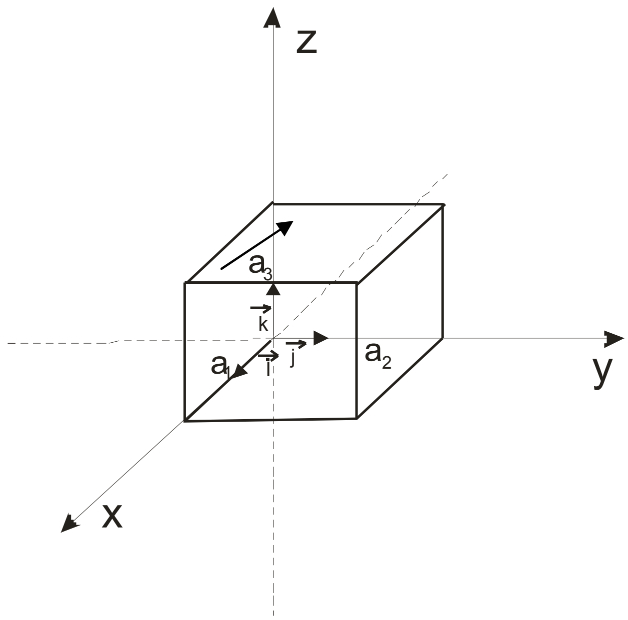


$$\vec{i} = (1,0,0)$$
$$\vec{j} = (0,1,0)$$
$$\vec{k} = (0,0,1)$$
$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

Svaki vektor $\vec{a}$ u prostoru predstavljamo:

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ ili

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ uredjena trojka



Intezitet vektora $\vec{a}$ je $$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Jedinični vektor vektora a je vektor $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$

Ako imamo dve tačke A i B u prostoru, vektor $\vec{AB}$ se pravi:

$A(x_1, y_1, z_1) \longrightarrow B(x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$
$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

<u>Skalarni proizvod ($\bullet$)</u>

Neka su dati vektori

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Tada je:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b})}$$

Ako nemamo dat ugao izmedju vektora: $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$

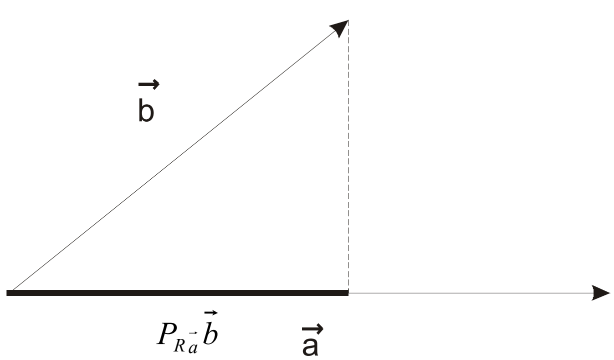
Ugao izmedju dva vektora:

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Uslov normalnosti:

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$$

Projekcija vektora : $P_{R_{\vec{a}}} \vec{b}$ je projekcija vektora $\vec{b}$ na pravac vektora $\vec{a}$ i obrnuto :
$P_{R_{\vec{b}}} \vec{a}$ je projekcija vektora $\vec{a}$ na $\vec{b}$



$$P_{R_{\vec{a}}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|} \quad \text{i} \quad P_{R_{\vec{b}}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

PRIMERI

1) Odrediti skalarni proizvod vektora:

$$\vec{a} = (4,-3,1)$$

$$\vec{b} = (5,-2,-3)$$

Rešenje:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (4,-3,1) \cdot (5,-2,-3)$$

$$= 20 + 6 + (-3) = 23$$

2) Dati su vektori $\vec{a} = (1,-1,2)$ i $\vec{b} = (0,2,1)$. Odrediti ugao izmedju vektora $\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{a}-\vec{b}$.

Rešenje:

$$\vec{a} = (1,-1,2)$$

$$\vec{b} = (0,2,1)$$

Nadjimo najpre vektore $\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{a}-\vec{b}$

$$\vec{a}+\vec{b} = (1,-1,2) + (0,2,1) = (1,1,3)$$

$$\vec{a}-\vec{b} = (1,-1,2) - (0,2,1) = (1,-3,1)$$

Radi lakšeg rada nazovimo: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{x}$

$\vec{a}-\vec{b} = \vec{y}$

Dakle: $\vec{x} = (1,1,3)$ i $\vec{y} = (1,-3,1)$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (1,1,3) \cdot (1,-3,1) = 1 - 3 + 3 = 1$$

$$\left|\vec{x}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

$$\left|\vec{y}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

Sad ovo ubacimo u formulu:

$$\cos\angle(\vec{x},\vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\left|\vec{x}\right|\left|\vec{y}\right|} = \frac{1}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}}$$

$$\cos\angle(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{11}$$

$$\angle(\vec{x},\vec{y}) = \arccos\frac{1}{11}$$

3) Odredi projekcije vektora $\vec{a}=(5,2,5)$ na vektor $\vec{b}=(2,-1,2)$

Rešenje:

$$\vec{a}=(5,2,5)$$

$$\vec{b}=(2,-1,2)$$

$$P_{R_{\vec{b}}}(\vec{a})=?$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(5,2,5)\cdot(2,-1,2)=10-2+10=18$$

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$$

$$P_{R_{\vec{b}}}(\vec{a})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

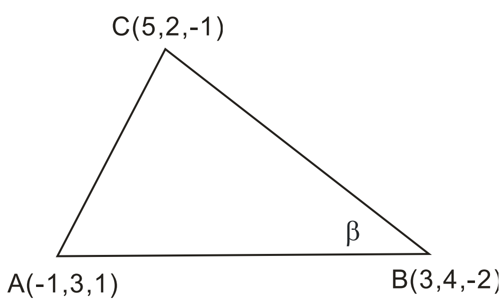
$$P_{R_{\vec{b}}}(\vec{a})=\frac{18}{3}$$

$$P_{R_{\vec{b}}}(\vec{a})=6$$

4) Date su koordinate temena trougla ABC (A(-1,3,1),B(3,4,-2), C(5,2,-1)). Odrediti

ugao ABC.

Rešenje:



Nadjimo najpre vektore $\vec{BA}$ i $\vec{BC}$

$$\cos\beta=\frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{\left|\vec{BA}\right|\cdot\left|\vec{BC}\right|}$$

$$\vec{BA}=(-1,3,1)-(3,4,-2)=(-4,-1,3)$$

$$\vec{BC}=(5,2,-1)-(3,4,-2)=(2,-2,1)$$

$$\left|\vec{BA}\right|=\sqrt{(4)^2+(1)^2+3^2}=\sqrt{9+1+16}=\sqrt{26}$$

$$\left|\vec{BC}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1}=\sqrt{9}=3$$

$$\vec{BA}\cdot\vec{BC}=(-4,-1,3)\cdot(2,-2,1)=-8+2+3=-3$$

$$\cos\beta=\frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{\left|\vec{BA}\right|\cdot\left|\vec{BC}\right|}$$

$$\cos\beta=\frac{-3}{3\cdot\sqrt{26}}$$

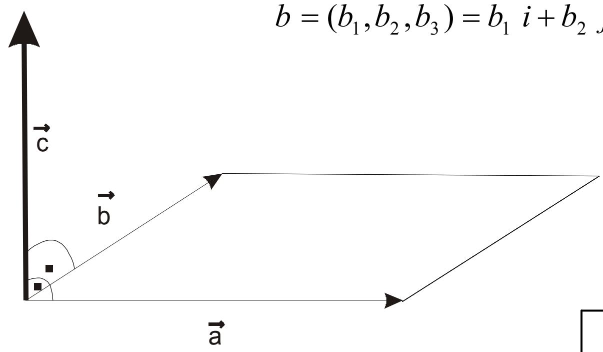
$$\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\beta=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$$

Vektorski proizvod ($\vec{a}\times\vec{b}$)

Neka su dati vektori

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)=a_1\,\vec{i}+a_2\,\vec{j}+a_3\,\vec{k}$$
$$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)=b_1\,\vec{i}+b_2\,\vec{j}+b_3\,\vec{k}$$



$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}}$ Pazi: $\vec{b}\times\vec{a}=-\,\vec{c}$

1) Vektor ***c*** je normalan i na vektor **a** i na vektor ***b***

2) Intenzitet vektora ***c*** je brojno jednak površini paralelograma nad vektorima **a** i ***b***

3) Smer vektora ***c*** se odredjuje pravilom desnog triedra(desnog zavrtnja)

Intenzitet vektora $\vec{a}\times\vec{b}$ je: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako je njihov vektorski proizvod jednak $\vec{0}$.

Konkretno:

$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$ = razvijemo ovu determinantu i (na primer) dobijemo $=\#\vec{i}+\$\vec{j}+\&\vec{k}$ gde su

#, $, & neki brojevi.

Tada je $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{\#^2+\$^2+\&^2}$

Površina paralelograma nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je P = $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

Dok površinu trougla računamo (logično) kao polovinu površine paralelograma:

$$P_\Delta=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

Da uradimo i ovde neki primer:

5. Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima:

$\vec{a}=(1,1,-1)$ i $\vec{b}\,(2,-1,2)$

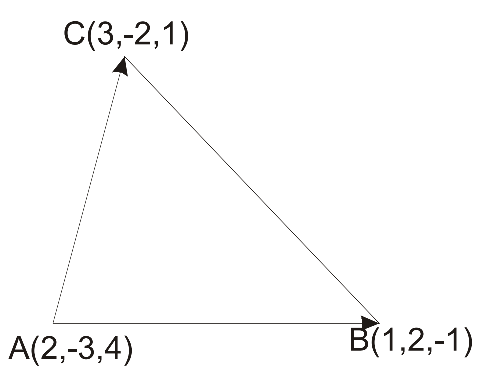
Rešenje: P = $|\vec{a}\times\vec{b}|$ Najpre tražimo $\vec{a}\times\vec{b}$.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\,(2\text{-}1)-\vec{j}\,(2\text{+}2)+\vec{k}\,(\text{-}1\text{-}2)=1\,\vec{i}-4\,\vec{j}-3\,\vec{k}=(1,-4,-3)$$

$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{26}$ dakle P= $\sqrt{26}$

6. **Izračunati površinu trougla ako su date koordinate njegovih temena**: A(2, -3, 4), B(1,2,-1), C(3,-2,1)

Rešenje: Najpre oformimo vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{AB}$ = (1 – 2, 2-(-3), -1 – 4) = (-1,5,-5)

$\overrightarrow{AC}$ = (3-2, -2 – (-3), 1 – 4) = (1,1, -3)

$$P_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -10\,\vec{i} - 8\,\vec{j} - 6\,\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-10)^2 + (-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$P_\Delta = \dfrac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \dfrac{1}{2}\, 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ i evo rešenja!