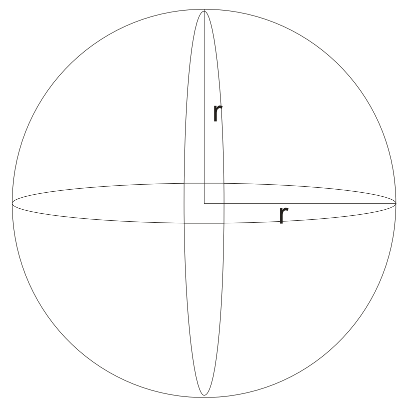
SFERA (LOPTA)

Sfera je skup svih tačaka prostira podjednako udaljenih od jedne fiksirane tačke(centra sfere).

Poluprečnik sfere(r) je rastojanje bilo koje tačke sfere od centra sfere.

Lopta je oblo telo ograničeno sferom.

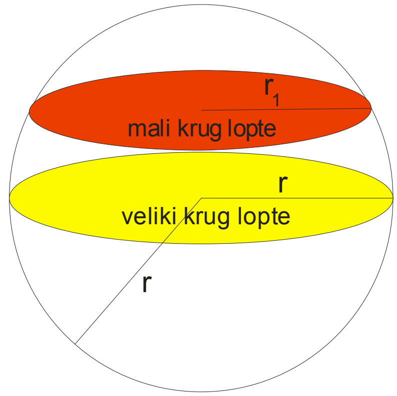


$P = 4r^2\pi$ je formula za površinu lopte

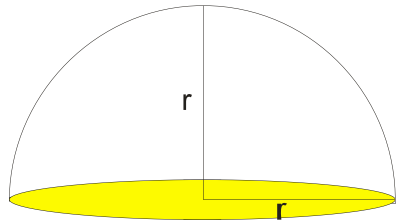
$V = \frac{4}{3} r^3 \pi$ je formula za zapreminu lopte

Lopta nastaje obrtanjem kruga oko bilo kog njegovog prečnika.

Presek lopte i bilo koje ravni je krug. Ako presečna ravan prolazi kroz centar dobija se **veliki krug** lopte, to jest krug koji ima najveću površinu.



Ako nam je zadata **polulopta:**



Njenu zapreminu ćemo izračunati lako, tako što zapreminu lopte podelimo sa 2.

$$\mathrm{V}_{polulopte} = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\mathrm{r}^3\pi = \frac{2}{3}\mathrm{r}^3\pi$$

Al kod površine moramo biti pažljivi , jer se ona sastoji od polovine površine lopte i površine velikog kruga lopte:

$$P_{polulopte} = \frac{1}{2}P_{lopte} + P_{velikikrug}$$

$$P_{polulopte} = \frac{1}{2}\cdot 4r^2\pi + r^2\pi$$

$$P_{polulopte} = 2r^2\pi + r^2\pi$$

$$P_{polulopte} = 3r^2\pi$$

343. Полупречник лопте је 3 cm. Израчунати површину и запремину лопте.

$r = 3cm$

$P = ?$

$V = ?$

$P = 4r^2\pi$

$P = 4 \cdot 3^2\pi$

$P = 4 \cdot 9\pi$

$P = 36\pi cm^2$

$V = \frac{4}{3}r^3\pi$

$V = \frac{4}{3}3^3\pi$

$V = \frac{4}{3} \cdot 27\pi$

$V = 4 \cdot 9\pi$

$V = 36\pi cm^3$

344. Запремина лопте је $\frac{4}{3}\pi$ cm^3. Одредити површину лопте.

$V = \frac{4}{3}\pi cm^3$

$P = ?$

Najpre ćemo iz zapremine naći poluprečnik lopte :

$V = \frac{4}{3}r^3\pi$

$\frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}r^3\pi$ skratimo $\frac{4}{3}$ i π i dobijamo:

$r^3 = 1$

$r = 1cm$

Dalje nije teško naći površinu:

$P = 4r^2\pi$

$P = 4 \cdot 1^2\pi$

$P = 4\pi cm^2$

345. Пречник лопте је 16 cm. Одредити површину и запремину лопте.

$2r = 16cm$
$P = ?$
$V = ?$

Iz 2r = 16 je očigledno r = 8 cm

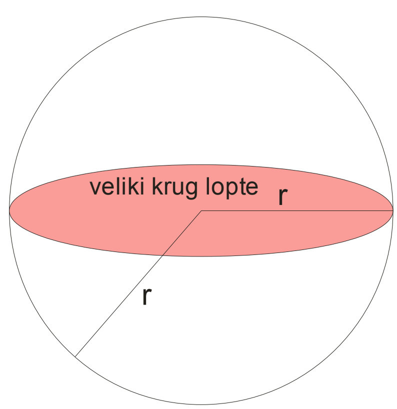
$P = 4r^2\pi$
$P = 4\cdot 8^2\pi$
$P = 4\cdot 64\pi$
$P = 256\pi cm^2$

$V = \frac{4}{3}r^3\pi$
$V = \frac{4}{3}8^3\pi$
$V = \frac{4}{3}\cdot 512\pi$

$V = \frac{2048}{3}\pi cm^3$

346. Обим великог круга лопте је 36π cm. Израчунати запремину лопте.

$O_{vk} = 36\pi cm$
$V = ?$



Veliki krug lopte ima isti poluprečnik kao i cela lopta!

$O_{vk} = 2r\pi$
$36\pi = 2r\pi$
$36 = 2r$
$r = 18cm$

$V = \frac{4}{3}r^3\pi$
$V = \frac{4}{3}18^3\pi$
$V = \frac{4}{3}\cdot 5832\pi$
$V = 4\cdot 1944\pi$
$V = 7776\pi cm^3$

347. Полупречник лопте је 4 cm. Ако се полупречник повећа за 3 cm, за колико ће се повећати површина лопте?

Najpre ćemo izračunati površinu te početne, manje lopte:

$r = 4cm$
$P = 4r^2\pi$
$P = 4\cdot 4^2\pi$
$P = 4\cdot 16\pi$
$P = 64\pi cm^2$

Nova lopta ima poluprečnik veši za 3 cm od početne , dakle $r_1 = 4 + 3 = 7cm$

Površina nove lopte je:

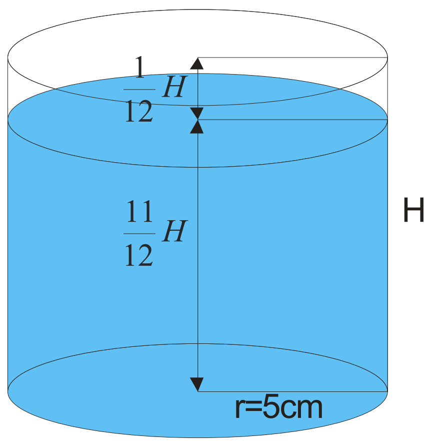
$r_1 = 7cm$
$P_1 = 4r^2\pi$
$P_1 = 4\cdot 7^2\pi$
$P_1 = 4\cdot 49\pi$
$P_1 = 196\pi cm^2$

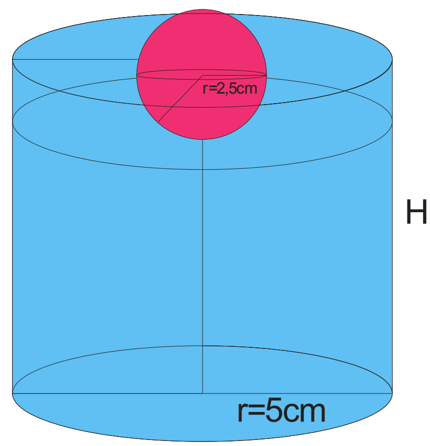
Oduzmimo površine da vidimo koliko je povećanje:

$P_1 - P = 196\pi - 64\pi = 132\pi cm^2$

348. Посуда облика ваљка, полупречника основе $r = 5$ cm, испуњена је водом до $\frac{11}{12}$ њене висине. Ако се у ту посуду потопи лопта полупречника $r_0 = 2{,}5$ cm, ниво воде достиже тачно врх те посуде. Колика је њена висина H?

Iz fizike znamo da telo potopljeno u vodu izbaci onoliko vode kolika je njegova zapremina.





Znači da je zapremina lopte 12 puta manja od zapremine valjka! To jest: $V_v = 12 \cdot V_l$

Naći ćemo zapreminu lopte, to pomnožiti sa 12 i dobiti zapreminu valjka.

$$V_l = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

$$V_l = \frac{4}{3}(2,5)^3 \pi$$

$$V_l = \frac{4}{3} \cdot 2,5 \cdot 2,5 \cdot 2,5\pi \quad \text{(pomnožimo 4 i 2,5 posebno i 2,5 sa 2,5)}$$

$$V_l = \frac{10}{3} \cdot 6,25\pi$$

$$V_l = \frac{62,5}{3} \cdot \pi cm^3$$

Zapremina valjka će biti:

$$V_v = 12 \cdot V_l = 12 \cdot \frac{62,5}{3}\pi = 4 \cdot 62,5\pi = 250\pi cm^3$$

$$V_v = r^2 \pi \cdot H$$

$$250\pi = 5^2 \pi H$$

$$250 = 25H$$

$$H = 10cm$$

349. Пречник лопте од пластелина је 8 cm. Ако се од те лопте направи купа чији је пречник основе једнак пречнику лопте, колика је висина те купе?

Šta se ovde neće promeniti?

Pa naravno, masa tela, odnosno njegova zapremina!

To je i početna naša ideja, da su zapremine kupe i lopte iste!

Kako je prečnik lopte 2r = 8 cm , jasno je da je poluprečnik r = 4cm , a to je i poluprečnik kupe!

$$V_l = \frac{4}{3} r^3 \pi$$
$$V_l = \frac{4}{3} 4^3 \pi$$
$$V_l = \frac{4}{3} 64\pi$$
$$V_l = \frac{256}{3} \pi cm^3$$

$$V_k = V_l$$
$$V_k = \frac{256}{3} \pi$$
$$\frac{1}{3} r^2 \pi H = \frac{256}{3} \pi$$
$$4^2 H = 256$$
$$16H = 256$$
$$H = \frac{256}{16}$$
$$H = 16cm$$

350. За бојење дрвене кугле пречника 16 cm утрошено је 32g боје. Колико је боје потребно за бојење 10 кугли пречника 2 dm?

Naravno , mi ustvari bojimo površinu kugli.

Naći ćemo površinu koju trebamo obojiti kod manje kugle i površinu 10 većih kugli koju trebamo obojiti a onda ćemo upotrebiti proporciju…

Ako je prečnik manje kugle 16cm onda je jasno poluprečnik $r_{mk} = 8cm$

Ako je prečnik veće kugle 2dm, odnosno 20 cm, to će poluprečnik biti: $r_{vk} = 10cm$

Nađimo najpre površinu manje kugle:

$$P_{mk} = 4r_{mk}^2\pi$$
$$P_{mk} = 4\cdot 8^2\pi$$
$$P_{mk} = 4\cdot 64\pi$$
$$P_{mk} = 256\pi cm^2$$

Sada tražimo površinu veće kugle:

$$P_{vk} = 4r_{vk}^2\pi$$
$$P_{vk} = 4\cdot 10^2\pi$$
$$P_{vk} = 4\cdot 100\pi$$
$$P_{vk} = 400\pi cm^2$$

Pošto imamo 10 većih kugli , tu je površina za bojenje : $400\pi\cdot 10 = 4000\pi cm^2$

Sada postavljamo proporciju:

$$256\pi : 32 = 4000\pi : x$$
$$256\pi\cdot x = 32\cdot 4000\pi$$
$$x = \frac{32\cdot 4000}{256}$$
$$x = 500g$$