PRIZME

Najpre da kažemo nešto o obeležavanjima i o tekstu zadataka:

- sa **a** obeležavamo dužinu osnovne ivice
- sa **H** obeležavamo dužinu visine prizme
- sa **B** obeležavamo površinu osnove (baze)
- sa **M** obeležavamo površinu omotača
- omotač se sastoji od **bočnih strana** , naravno trostrana prizma u omotaču ima 3 takve strane, četvorostrana 4 itd.
- sa **D** obeležavamo dužinu dijagonale prizme
- ako u tekstu zadatka kaže **jednakoivična** prizma, to nam govori da su osnovna ivica i visina jednake , to jest :

  a = H

- ako u tekstu zadatka ima reč **prava** – to znači da je visina prizme normalna na ravan osnove ili ti ,

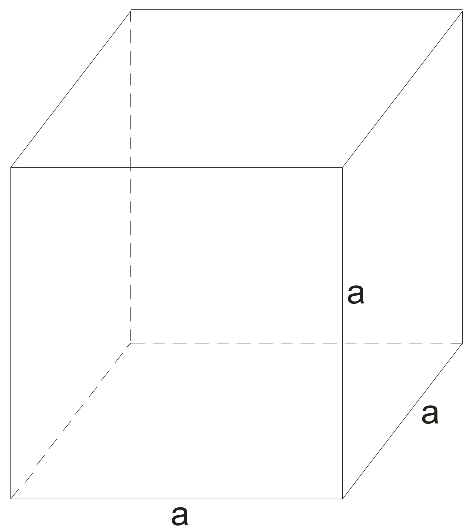
  jednostavnije rečeno , prizma nije kriva

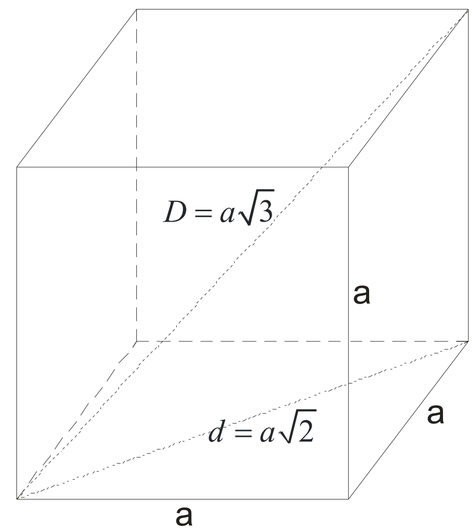
- ako u tekstu zadatka ima reč **pravilna** , to nam govori da je u osnovi (bazi) pravilan mnogougao:

  jednakostraničan trougao, kvadrat, itd.

Dve najpoznatije prizme su kocka i kvadar, pa vam predlažemo da najpre njih proučite:

KOCKA





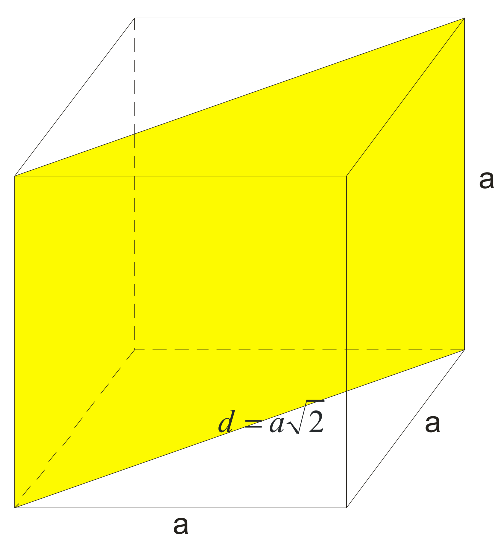
$$P = 6a^2$$

$$V = a^3$$

Kocka ima 12 ivica dužine a.

Mala dijagonala (dijagonala osnove) je $d = a\sqrt{2}$.

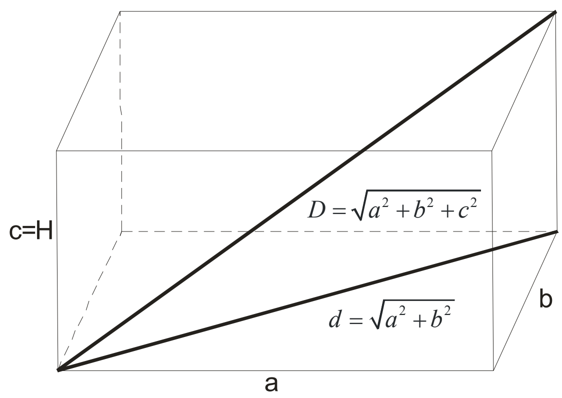
Velika (telesna) dijagonala je $D = a\sqrt{3}$

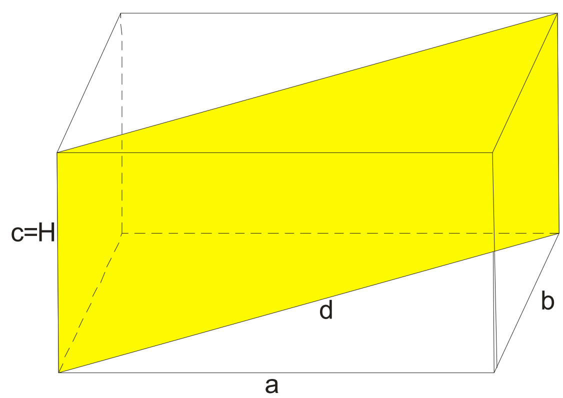


dijagonalni presek

Površina dijagonalnog preseka se računa po formuli: $P_{DP} = a^2\sqrt{2}$

KVADAR





dijagonalni presek

$$P = 2(ab + ac + bc)$$

$$V = abc$$

Mala dijagonala (dijagonala osnove) se računa $d^2 = a^2 + b^2$ to jest $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Velika dijagonala se računa $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ to jest $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Dijagonalni presek je pravougaonik površine $P_{DP} = d \cdot c$

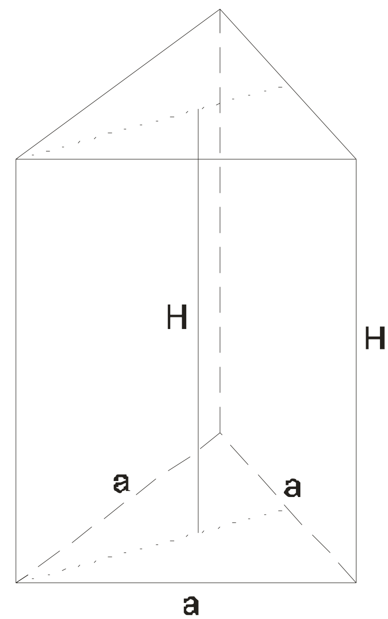
Površina svake prizme se izražava formulom:

$$P = 2B + M$$

Zapremina svake prizme se izračunava formulom:

$$V = B \cdot H$$

PRAVA PRAVILNA TROSTRANA PRIZMA



$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ je površina osnove(baze)

$M = 3aH$ je površina omotača

$$P = 2B + M$$

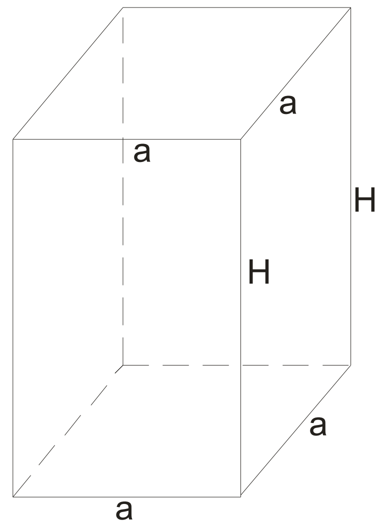
$$P = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH$$

$$V = B \cdot H$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

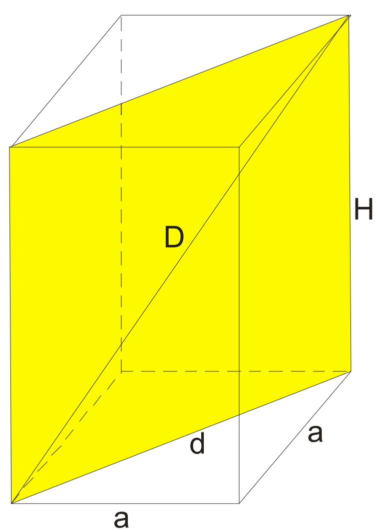
<u>***PRAVA PRAVILNA ČETVOROSTRANA PRIZMA***</u>



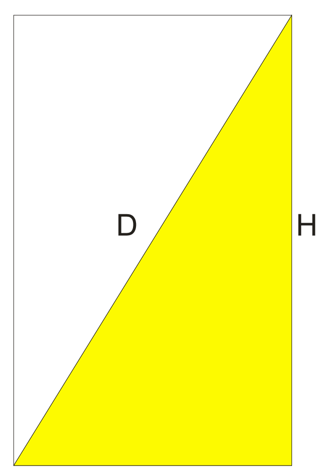
$$B = a^2 \qquad\qquad M = 4aH$$

$$P = 2B + M \qquad\qquad V = B \cdot H$$

$$P = 2a^2 + 4aH \qquad\qquad V = a^2 \cdot H$$



dijagonalni presek



$$d = a\sqrt{2}$$

dijagonalni presek

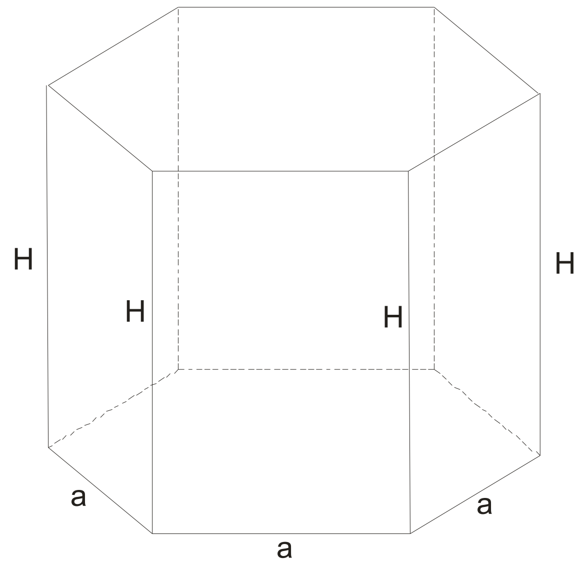
$$D^2 = (a\sqrt{2})^2 + H^2$$

Površina dijagonalnog preseka se izračunava:

$$P = d \cdot H$$

$$P = aH\sqrt{2}$$

PRAVA PRAVILNA ŠESTOSTRANA PRIZMA

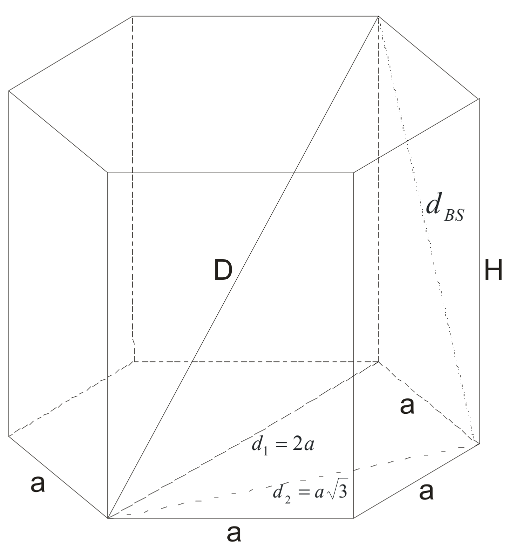


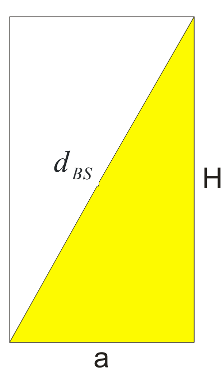
$$B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \qquad M = 6aH$$

$$P = 2B + M \qquad V = B \cdot H$$

$$P = 2 \cdot 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 6aH \qquad V = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H$$

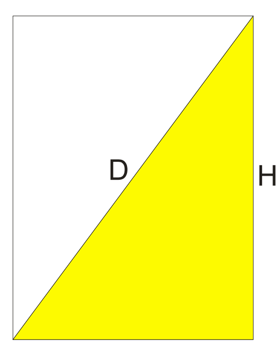
$$P = 3a^2\sqrt{3} + 6aH \qquad V = \frac{3a^2H\sqrt{3}}{2}$$





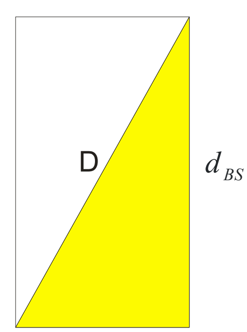
Bočna strana

$d_{BS}{}^2 = H^2 + a^2$



$d_1 = 2a$

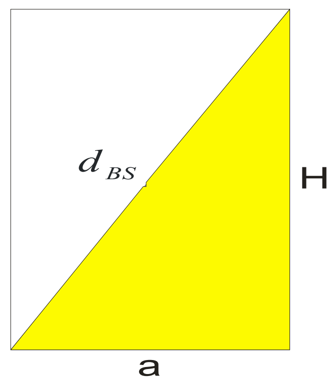
Veći dijagonalni presek



$d_2 = a\sqrt{3}$

Manji dijagonalni presek

Još samo da vam napomenemo da primena Pitagorine teoreme na bočnu stranu :



Bočna strana

$$d_{BS}^{\ 2} = H^2 + a^2$$

važi kod svake od navedenih pravilnih prizmi!

ZADACI

1*)* Ako se ivica kocke produži za 3cm, površina joj se poveća za 198 cm^2. Izračunati površinu i zapeminu kocke.

Rešenje:

Obeležimo ivicu kocke sa a. Njena površina je $P = 6a^2$

Ako se ivica kocke poveća za 3cm, njena ivica će biti (a+3) a površina $P_1 = 6(a+3)^2$

Prema tekstu zadatka će biti:

$$P_1 - P = 198cm^2$$

$$6(a+3)^2 - 6a^2 = 198 \rightarrow \text{ Sve podelimo sa 6}$$

$$(a+3)^2 - a^2 = 33$$

$$\cancel{a^2} + 6a + 9 \cancel{- a^2} = 33$$

$$6a = 33 - 9$$

$$6a = 24$$

$$a = 4cm$$

$$P = 6a^2$$

$$P = 6 \cdot 4^2$$

$$P = 6 \cdot 16$$

$$P = 96cm^2$$

$$V = a^3$$

$$V = 4^3$$

$$V = 64cm^3$$

2) Ivice dve kocke stoje u razmeri 4:3. Kolike su im površine i zapremine ako im se površine razlikuju za 168 cm^2 ?

Rešenje:

Obeležimo sa a stranicu jedne kocke a sa a_1 stranicu druge kocke.

$$a : a_1 = 4 : 3 \Rightarrow a = 4k \quad \text{i} \quad a_1 = 3k$$

$$P - P_1 = 168$$

$6a^2 - 6a_1^2 = 168 \rightarrow$ Delimo sve sa 6

$$a^2 - a_1^2 = 28$$

$$(4k)^2 - (3k) = 28$$

$$16k^2 - 9k^2 = 28$$

$$7k^2 = 28$$

$$k^2 = 4$$

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 4 \cdot k = 4 \cdot 2 = 8cm$$

$$a_1 = 3k = 3 \cdot 2 = 6cm$$

Sada nije teško naći P i V.

$$P = 6a^2 = 6 \cdot 8^2 = 6 \cdot 64 = 384cm^2$$

$$V = a^3 = 8^3 = 512cm^3$$

$$P = 6a_1^2 = 6 \cdot 6^2 = 6 \cdot 36 = 216cm^2$$

$$V = a_1^3 = 6^3 = 216cm^3$$

3) Dimenzije kvadra su tri uzastopna cela broja, a dijagonala je $\sqrt{149}cm$. Izračunati površinu i zapreminu kvadra.

Rešenje:

Tri uzastopna cela broja možemo obeležiti sa $x-1$, x, $x+1$

$$a^2 + b^2 + c^2 = D^2$$

$$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = \sqrt{149}^2$$

$$x^2 \cancel{-2x} + 1 + x^2 + x^2 \cancel{+2x} + 1 = 149$$

$$3x^2 = 149 - 1 - 1$$

$$x^2 = \frac{147}{3}$$

$$x^2 = 49$$

$$x = 7cm$$

$$a = x - 1$$

$$b = x$$

$$c = x + 1$$

$$a = x - 1 = 6cm$$

$$b = x = 7cm$$

$$c = x + 1 = 8cm$$

$$P = 2(ab + ac + bc) = 2(6 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 8) = 2 \cdot 146$$

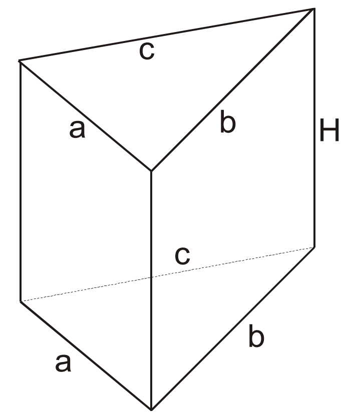
$$P = 292cm$$

$$V = abc = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336cm^3$$

4) Dužine osnovnih ivica prave trostrane prizme odnose se kao 17:10:9, dužina bočne ivice je 16cm, a površina 1440 cm^2. Odrediti dužine osnovnih ivica.

Rešenje:

$a:b:c=17:10:9$
$H=16cm$
$P=1440cm^2$
$\overline{a=?,b=?,c=?}$



Iz $a:b:c=17:10:9 \quad \Rightarrow \quad a=17k, b=10k, c=9k$

$P=2B+M$

Bazu ćemo izraziti preko Heronovog obrasca

$$B=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$B=\sqrt{18k\cdot 1k\cdot 8k\cdot 9k}$$
$$B=\sqrt{1296k^4}$$
$$B=36k^2$$

$$s=\frac{a+b+c}{2}$$
$$s=\frac{17k+10k+9k}{2}$$
$$s=18k$$

$$M=aH+bH+cH=H(a+b+c)$$
$$M=16\cdot 38k$$
$$M=576k$$
$$\boxed{P=2B+M}$$
$$1440=2\cdot 36k^2+576k$$

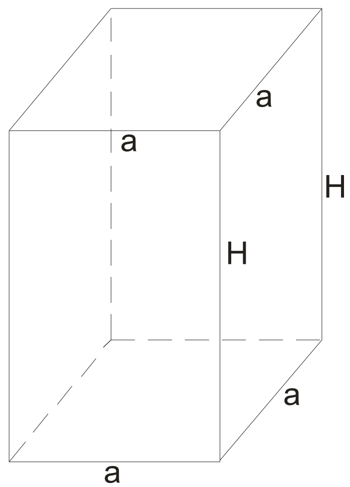
$72k^2+576k-1440=0 \rightarrow$ Podelimo sve sa 72

$k^2+8k-20=0 \rightarrow$ kvadratna po ‘’k’’

$$k_{1,2}=\frac{-8\pm 12}{2}\rightarrow k=2\Rightarrow$$
$$a=17\cdot 2=34cm$$
$$b=10\cdot 2=20cm$$
$$c=9\cdot 2=18cm$$

5) Prava pravilna četvorostrana prizma ima visinu 16cm i površinu 370 cm^2 .

Izračunati osnovnu ivicu.



$$H = 16cm \qquad P = 2B + M$$
$$P = 370cm^2 \qquad P = 2a^2 + 4aH$$
$$a = ? \qquad 370 = 2a^2 + 4a \cdot 16$$
$$370 = 2a^2 + 64a$$
$$2a^2 + 64a - 370 = 0$$
$$a^2 + 32a - 185 = 0$$
$$a_{1,2} = \frac{-32 \pm 42}{2}$$
$$a_1 = 5$$
$$a_2 = -38 \rightarrow Nemoguće$$
$$a = 5$$

Dakle, osnovna ivica je $\boxed{a = 5cm}$

NAPOMENA:

Nepravilno je reći osnovna ivica je… već bi trebalo dužina osnovne ivice je…

Ako Vaš profesor insistira na ovome ispoštujte ga, jer je svakako u pravu.

Sve je stvar dogovora….

6) Izračunati površinu i zapreminu prave trostrane jednakoivične prizme ivice $a = 8cm$

Rešenje:

Podatak da je u pitanju jednakoivična prizma nam govori da je osnovna ivica jednaka visini. To jest, omotač se ovde sastoji iz 3 kvadrata stranice a

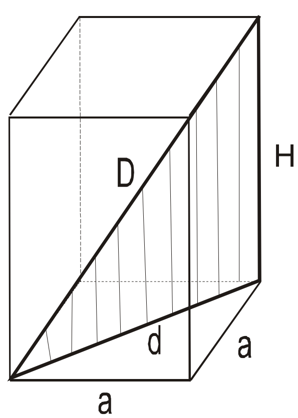
$$a = 8$$
$$P = 2B + M$$
$$P = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a^2$$
$$P = 2\frac{8^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot 8^2$$
$$P = \frac{64\sqrt{3}}{2} + 64\cdot 3$$

$P = \left(32\sqrt{3} + 192\right)cm^2 \rightarrow$ Ovde ne bi bilo loše da se izvuče zajednički ispred zagrade!

$$P = 32\left(\sqrt{3} + 6\right)cm^2$$
$$V = B\cdot H$$
$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$
$$V = \frac{8^3\sqrt{3}}{4} = \frac{512\sqrt{3}}{4}$$
$$V = 128\sqrt{3}cm^3$$

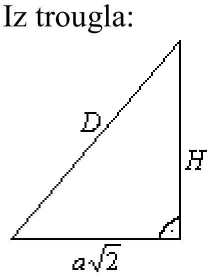
7) Pravilna četvorostrana prizma ima omotač 8 m^2 **i dijagonalu 3** m **. Izračunati njenu zapreminu.**

Rešenje:



Pošto je $M = 4aH \Rightarrow 4aH = 8 \Rightarrow aH = 2$

Iz trougla:



je
$$H^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = D^2$$
$$H^2 + 2a^2 = 9$$

Napravimo sistem:

$$aH = 2 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{2}{a} \rightarrow \text{Zamenimo u drugu jednačinu}$$

$$H^2 + 2a^2 = 9$$
$$\left(\frac{2}{a}\right)^2 + 2a^2 = 9$$
$$\frac{4}{a^2} + 2a^2 = 9 \rightarrow \text{ Smena: } a^2 = t$$

$$\frac{4}{t} + 2t = 9$$

$$2t^2 - 9t + 4 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{4}$$
$$t_1 = 4$$
$$t_2 = \frac{1}{2}$$

Vratimo se u smenu:

$$a^2 = 4$$
$$a = 2m$$
$$H = \frac{2}{a}$$
$$H = 1m$$
$$V = a^2 \cdot H$$
$$V = 2^2 \cdot 1$$
$$V = 4m^3$$

ili

$$a^2 = \frac{1}{2}$$
$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} m$$
$$H = 2\sqrt{2}m$$
$$V = a^2 \cdot H$$
$$V = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 2\sqrt{2}$$
$$V = \frac{2}{4} \cdot 2\sqrt{2}$$
$$V = \sqrt{2}m^3$$

<u>Pazi:</u> Ovde imamo 2 moguća rešenja, i oba su "dobra" jer zadovoljavaju zadate početne uslove!

8) Odrediti površinu i zapreminu kocke u funkciji površine dijagonalnog preseka.

Rešenje:

Površina dijagonalnog preseka je:

$$Q = a^2\sqrt{2}$$

$$a^2 = \frac{Q}{\sqrt{2}}$$

$$a = \sqrt{\frac{Q}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{2}} \rightarrow Racionališemo$$

$$a = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt{Q}\sqrt[4]{8}}{2}$$

$$P = 6a^2 = 6 \cdot \frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{6Q}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}Q$$

$$V = a^3 = \left(\frac{\sqrt{Q}\sqrt[4]{8}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{Q}^3 \cdot \sqrt[4]{8^3}}{8}$$

$$V = \frac{\sqrt{Q}^3 \cdot \sqrt[4]{4^4 \cdot 2}}{8} = \frac{\sqrt{Q}^3 \cdot 4 \cdot \sqrt[4]{2}}{8} = \frac{\sqrt{Q}^3\sqrt[4]{2}}{2}$$

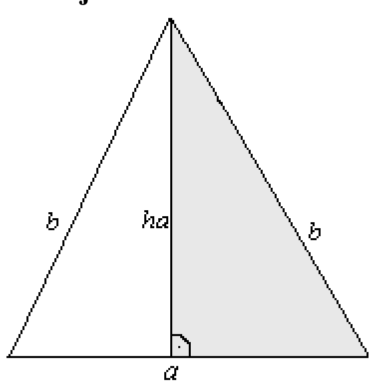
$$V = \frac{Q\sqrt{Q}\sqrt[4]{2}}{2}$$

Pazi (na sredjivanje): $\sqrt[4]{8^3} = \sqrt[4]{(2^3)^3} = \sqrt[4]{2^9} = \sqrt[4]{2^8} \cdot \sqrt[4]{2}$

$= 2^2 \cdot \sqrt[4]{2} = 4 \cdot \sqrt[4]{2}$

9) Osnova prava prizme je jednakokraki trougao osnovice 10dm, a visina tog trougla jednaka je visini prizme. Ako je zapremina prizme $720dm^3$, izračunati površinu prizme.

Rešenje:



$$a = 10dm$$

$$h_a = H$$

$$V = 720dm^3$$

$$V = B \cdot H$$

$$V = \frac{a \cdot h_a}{2} \cdot H$$

$$720 = \frac{10 \cdot H}{2} \cdot H$$

$$720 = 5H^2$$

$$H^2 = 144$$

$$H = 12dm$$

$$h_a = 12dm$$

Primenimo Pitagorinu teoremu na jednakokraki trougao:

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_a^{\,2}$$

$$b^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 12^2$$

$$b^2 = 5^2 + 12^2$$

$$b^2 = 169$$

$$b = 13dm$$

$$P = 2B + M$$

$$P = 2 \cdot \frac{ah_a}{2} + aH + 2bH$$

$$P = ah_a + H(a + 2b)$$

$$P = 10 \cdot 12 + 12 \cdot (10 + 26)$$

$$P = 120 + 432$$

$$P = 552dm^2$$

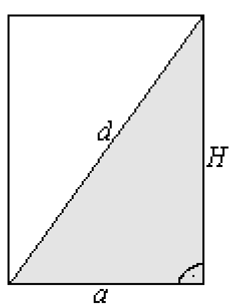
10) Osnova prave prizme je romb čije su dijagonale $d_1 = 18cm, \quad d_2 = 24cm,$ dok je dijagonala bočne stranice prizme $d = 39cm$. Izračunati površinu prizme.

Rešenje:

Najpre primenimo Pitagorinu teoremu na romb.

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$
$$a^2 = \left(\frac{18}{2}\right)^2 + \left(\frac{24}{2}\right)^2$$
$$a^2 = 81 + 144$$
$$a^2 = 255$$
$$a = 15cm$$

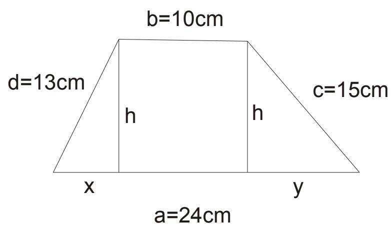
Pogledajmo jednu bočnu stranu:



$$H^2 = d^2 - a^2$$
$$H^2 = 39^2 - 15^2$$
$$H^2 = 1521 - 225$$
$$H^2 = 1296$$
$$H = 36cm$$

$$P = 2B + M$$
$$P = 2 \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{2} + 4aH$$
$$P = 18 \cdot 24 + 4 \cdot 15 \cdot 36$$
$$P = 432 + 2160$$
$$P = 2592cm^2$$

11) Osnova prizme je trapez čije su osnove 24cm i 10cm, a kraci 13cm i 15cm. Izračunati površinu i zapreminu ako je njena visina jednaka visini trapeza.
Rešenje:



→ Spustimo visine i obeležimo "deliće'' sa x i y

$$\left.\begin{aligned} h^2 &= d^2 - x^2 \\ h^2 &= c^2 - y^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow d^2 - x^2 = c^2 - y^2$$

$$169 - x^2 = 225 - y^2$$

$$y^2 - x^2 = 225 - 169$$

$$y^2 - x^2 = 56$$

$$(y - x)(y + x) = 56$$

Kako je $x + y = a - b$
$x + y = 14$ imamo da je:

$$(y - x) \cdot 14 = 56$$

$$y - x = 4$$

Sada imamo sistem:

$$\left.\begin{aligned} y + x &= 14 \\ y - x &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2y = 18$$

$$y = 9cm$$

Vratimo se u:

$$h^2 = c^2 - y^2 \qquad B = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$h^2 = 15^2 - 9^2 \qquad B = \frac{24+10}{2} \cdot 12$$

$$h^2 = 225 - 81 \qquad B = 17 \cdot 12$$

$$h = 12cm \qquad B = 204cm^2$$

$$H = 12cm$$

$$P = 2B + M$$

PAZI: M se sastaju iz četiri različita pravougaonika:

$$M = H(a + b + c + d) \qquad V = B \cdot H$$

$$M = 12 \cdot (24 + 10 + 13 + 15) \qquad V = 204 \cdot 12$$

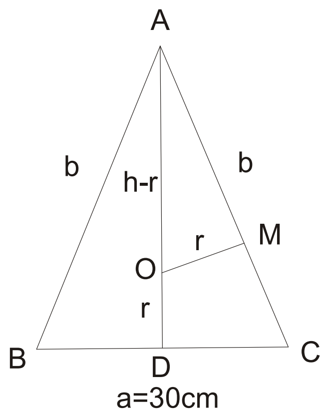
$$M = 12 \cdot 62 \qquad V = 2448cm^3$$

$$M = 744cm^2$$

$$P = 2 \cdot 204 + 744$$

$$P = 1152cm^2$$

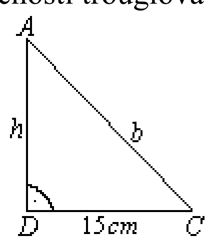
12) Osnova prizme je jednakokraki trougao osnovice 30cm i poluprečnik upisane kružnice je 10cm. Izračunati zapreminu prizme ako je njena visina jednaka visini trougla koja odgovara osnovici.
Rešenje:

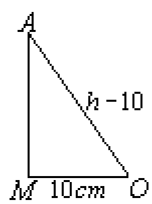


$$
\begin{aligned}
a &= 30cm \\
r &= 10cm \\
ha &= H \\
\hline
V &= ?
\end{aligned}
$$

<u>I Način</u>

Iz sličnosti trouglova trougla ADC i trougla AMO





$$\Rightarrow \quad 15:10 = b:(h-10)$$
$$15(h-10) = 10b$$
$$15h - 150 = 10b$$
$$3h - 30 = 2b$$
$$h = \frac{2b+30}{3}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = b^2$$
$$15^2 + \left(\frac{2b+30}{3}\right)^2 = b^2$$
$$225 + \left(\frac{4b^2 + 120b + 900}{9}\right) = b^2 .... / \cdot 9$$
$$2025 + 4b^2 + 120b + 900 = 9b^2$$
$$5b^2 - 120b - 2925 = 0$$
$$b^2 - 24b - 585 = 0$$
$$b_{1,2} = \frac{24 \pm 54}{2}$$
$$b_1 = 39cm$$
$$b_2 = -15 \rightarrow Nemoguće$$
$$b = 39cm$$

$$(\frac{a}{2})^2 + {h_a}^2 = b^2$$
$${h_a}^2 = b^2 - (\frac{a}{2})^2$$
$${h_a}^2 = 39^2 - (\frac{30}{2})^2$$
$${h_a}^2 = 1521 - 225$$
$${h_a}^2 = 1296$$
$$h_a = 36cm$$

Sada je $h_a = 36cm = H$

$$B = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{30 \cdot 36}{2} = 540$$
$$V = BH$$
$$V = 540 \cdot 36$$
$$V = 19440cm^3$$

Ovaj zadatak smo mogli rešiti i na drugi način.

II Način

Znamo obrasce za površinu:

$$P = r \cdot S \qquad \text{i} \qquad P = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$
$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

to jest: $S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{a+2b}{2} = \frac{30+2b}{2} = \frac{\cancel{2}(15+b)}{\cancel{2}}$

$$S = 15 + b$$

$$P = \sqrt{(15+b)(15+b-30)(15+b-b)(15+b-b)}$$
$$P = \sqrt{(15+b)(b-15) \cdot 15^2}$$
$$P = 15\sqrt{b^2 - 15^2} = 15\sqrt{b^2 - 225}$$

S druge strane je

$$P = r \cdot s = 10 \cdot (15+b)$$
$$P = P$$
$$10(15+b) = 15\sqrt{(b-15)(b+15)}$$
$$100(15+b)^2 = 15^2(b-15)(b+15)$$
$$100(15+b) = 225(b-15)$$
$$1500 + 100b = 225b - 3375$$
$$100b - 225b = -3375 - 1500$$
$$-125b = -4875$$
$$b = 39cm$$