TRIGONOMETRIJSKI KRUG

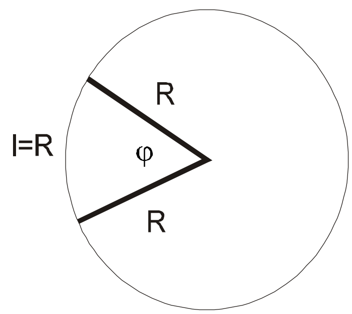
Uglovi mogu da se mere u stepenima i radijanima. Sa pojmom stepena smo se upoznali još u osnovnoj školi i ako se sećate , njega smo podelili na minute i sekunde.($1^0=60`$ , $1`=60``$). Da bi objasnili šta je to radijan, posmatraćemo kružnicu poluprečnika R .Obim kružnice se računa po formuli O= $2R\pi$, a znamo da je $\pi \approx 3{,}14$ .Ako uzmemo deo te kružnice (kružni luk) koji je dužine baš R , njemu odgovara neki centralni ugao φ .

Mera centralnog ugla koji odgovara luku dužine R je jedan radijan.

Jasno je da onda pun ugao ima 2π radijana. Odnosno:

$$360^0=2\pi \text{ radijana}$$

$$180^0=\pi \quad \textbf{ZAPAMTI}$$



$$1^0 = \frac{\pi}{180} radijana$$

Važi dakle: $1` = \frac{\pi}{180 * 60} radijana$

$$1`` = \frac{\pi}{180 * 60 * 60} radijana$$

I obrnuto: $1rad = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 17` 45``$

Primer 1:

Nađi radijansku meru ugla od:

$a)$ 75^0

$b)$ 245^0

$v)$ $82^0 30`$

Rešenje: a) Kako je $1^0 = \frac{\pi}{180} radijana$ to je $75^0 = 75\frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$

b) $245^0 = 245\frac{\pi}{180} = \frac{49\pi}{36}$

v) $82^0 30` = 82\frac{\pi}{180} + 30\frac{\pi}{180 * 60} = \frac{11\pi}{24}$

Primer 2.

Naći meru u stepenima ugla čija je radijanska mera:

$a)\ \dfrac{3\pi}{4}$

$b)\ \dfrac{11\pi}{6}$

$v)\ 5radijana$

Rešenje:

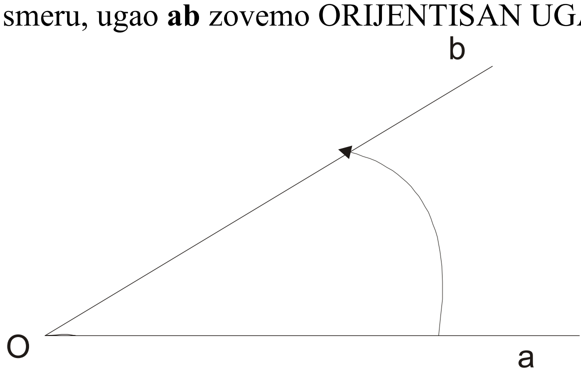
$$a)\frac{3\pi}{4}=\frac{3*180}{4}=135^0$$
$$b)\frac{11\pi}{6}=\frac{11*180}{6}=330^0$$
$$v)5radijana=5\cdot(57^0 17`45``)$$
$$=285^0 85`225``$$
$$=285^0 88`45``$$
$$=286^0 28`45``$$

Dalje smo ugao definisali kao dve polupravе sa zajedničkim početkom.A možemo razmišljati i ovako:Uočimo jednu polupravu koja može da se obrće oko svoje početne tačke O.Pri obrtanju ćemo razlikovati dva smera:

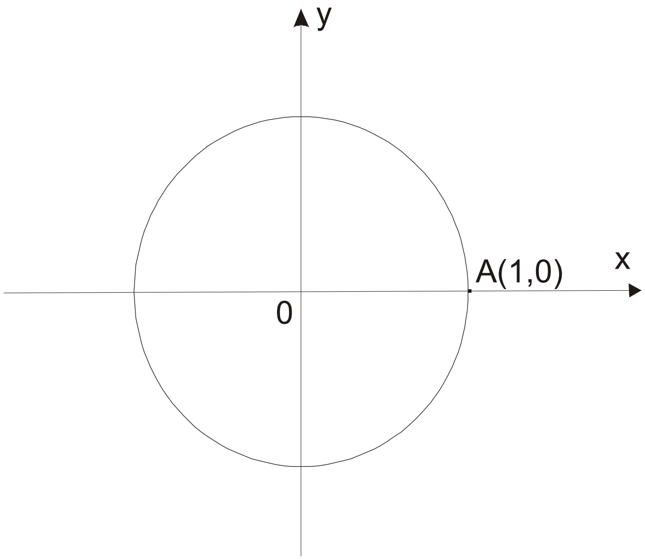
POZITIVAN – smer suprotan od smera kretanja kazaljke na časovniku i

NEGATIVAN- smer kretanja kazaljke časovnika.

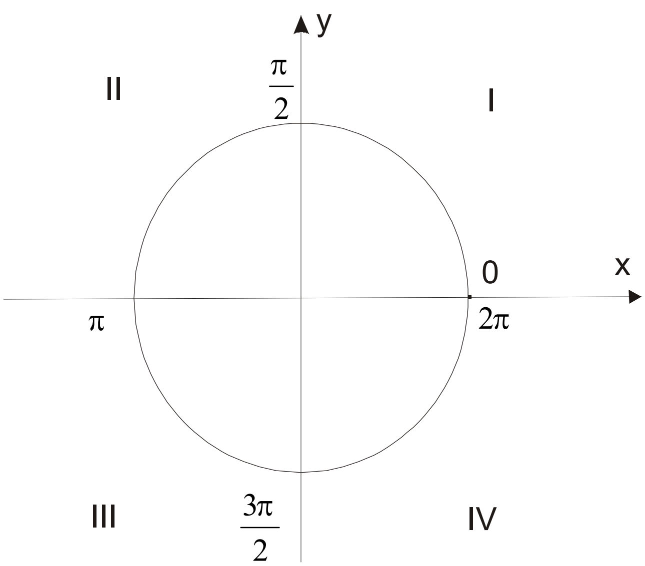
Ako obeležimo sa **a** početni i sa **b** završni položaj poluprave nakon obrtanja tačke O u jednom ili drugom smeru, ugao **ab** zovemo ORIJENTISAN UGAO.



TRIGONOMETRIJSKI KRUG je krug poluprečnika 1 čiji je centar u koordinatnom početku.



Tačka A(1,0) koja pripada trigonometrijskom krugu zove se POČETNA tačka.
Na trigonometrijskom krugu ćemo posmatrati različite lukove koji svi počinju u tački A. Luk koji obilazimo u smeru suprotnom od kazaljke na časovniku je POZITIVAN luk, a u smeru kazaljke je NEGATIVAN luk. Uglovi po kvadrantima idu ovako:



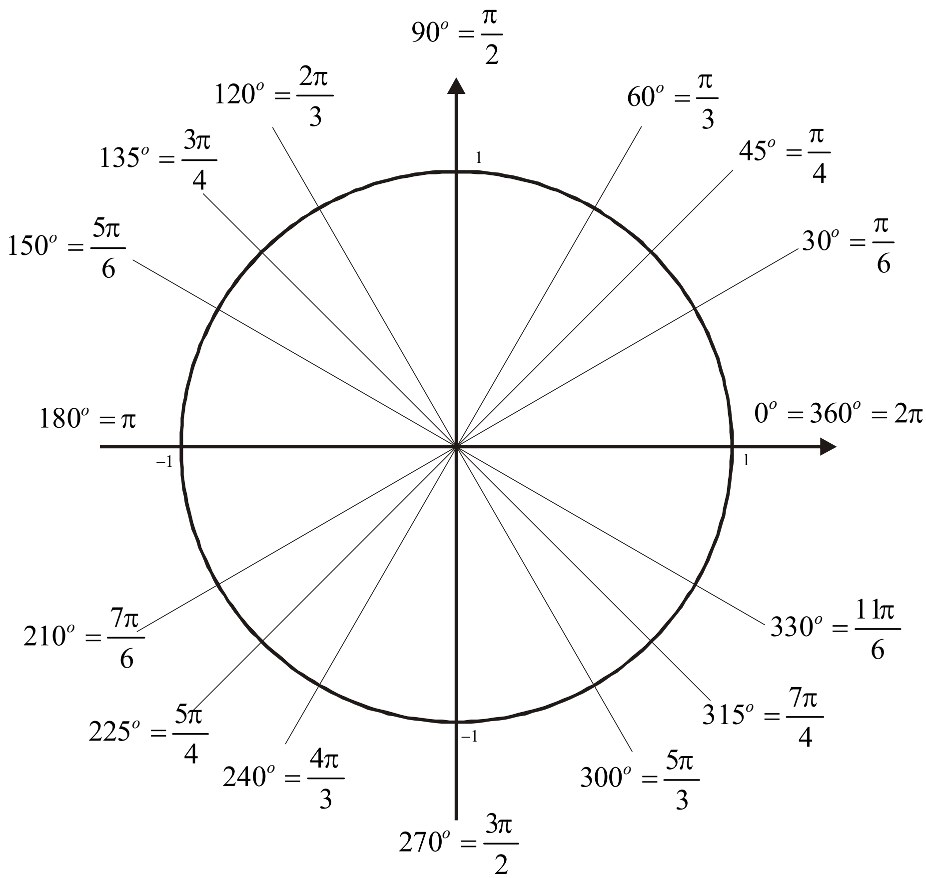
iz I kvadranta: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

iz II kvadranta : $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

iz III kvadranta : $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

iz IV kvadranta : $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Uglovi $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, su granični i podrazumeva se da nisu ni u jednom kvadrantu.
Uglove čije ćemo vrednosti očitavati sa trigonometrijskog kruga su sledeći:

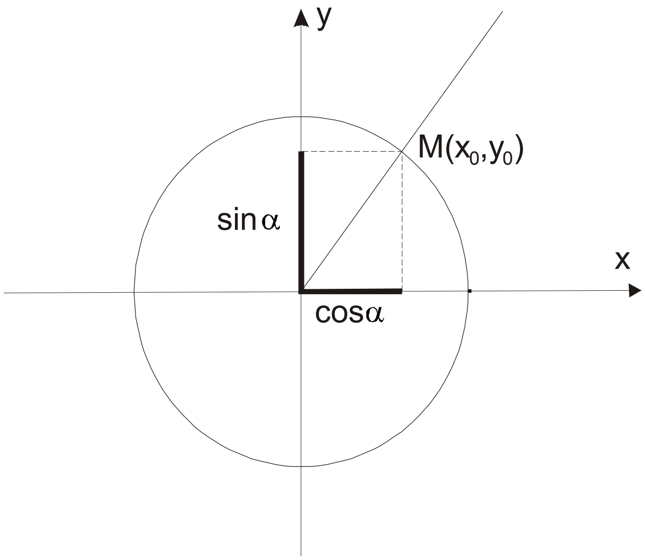


Sinus i kosinus proizvoljnog ugla

Za bilo koji proizvoljan ugao uvek jedan krak poklopimo sa *x*- osom, tj, sa početnom tačkom A(1,0), drugi krak seče trigonometrijski u nekoj tački $M(x_0,y_0)$. Iz te tačke spustimo normale na *x* i *y* osu. Te dužine su:

- **Na x-osi cos α (cos α =x_0)**

- **Na y-osi sin α (sin α =y_0)**



Evo našeg predloga kako da zapamtite vrednosti i da ih " pročitate" sa kruga.

Zapamtimo tri broja:

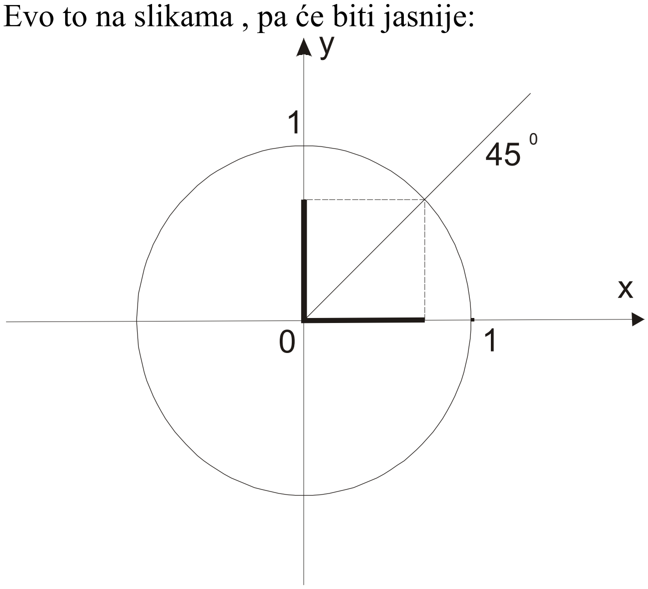
$$\frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

koji su poređani od najmanjeg do najvećeg.

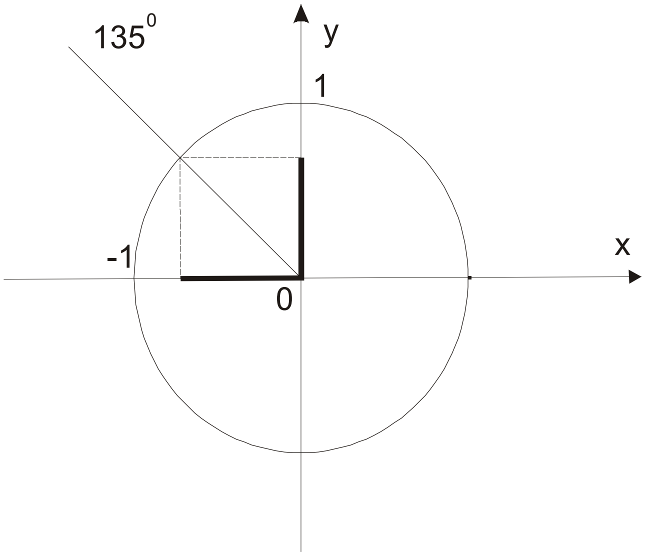
Broj u sredini $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **odgovara uglovima koji su sredine kvadranata!**

Znači sinusi i kosinusi uglova od 45 , 135 , 225 i 315 stepeni imaju vrednost $\frac{\sqrt{2}}{2}$, samo vodimo računa da li je ta vrednost $+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ili $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

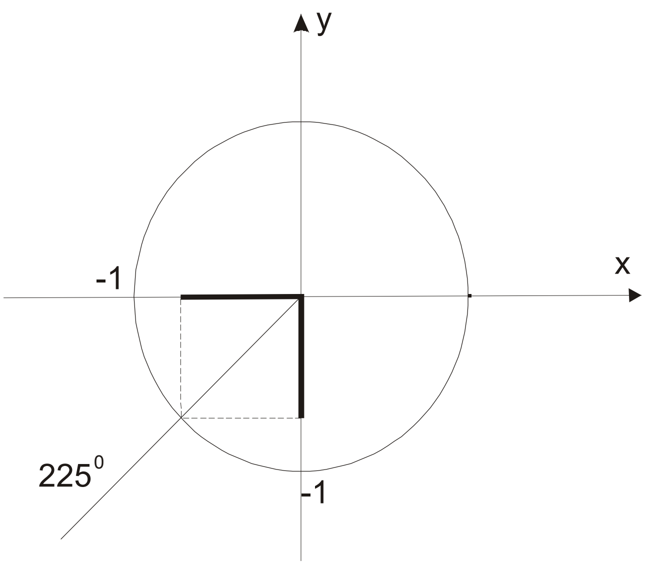
Evo to na slikama , pa će biti jasnije:



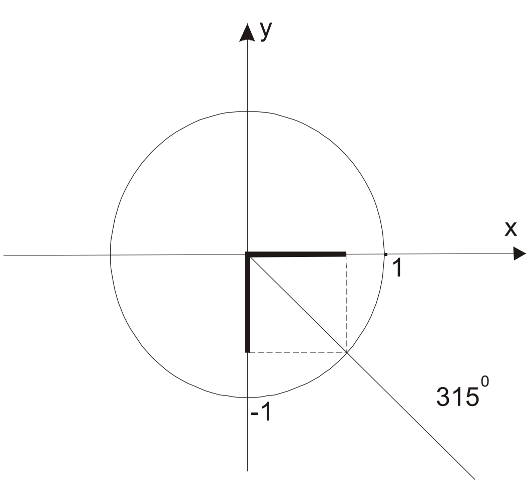
sin 45^0=cos45^0= $\frac{\sqrt{2}}{2}$



sin 135^0=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ a **cos 135^0**= - $\frac{\sqrt{2}}{2}$



sin 225^0= - $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cos 225^0= - $\frac{\sqrt{2}}{2}$



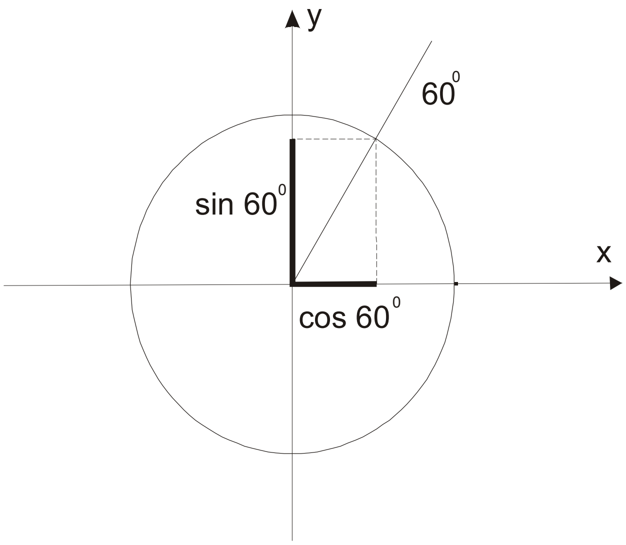
sin 315^0= - $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a cos 315^0=$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Za ostale uglove vrednosti će biti $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ili $\frac{\sqrt{3}}{2}$, naravno opet gledamo da li je + ili - .

Evo par primera:

Primer1.

Nađi $\sin 60^0$ i $\cos 60^0$

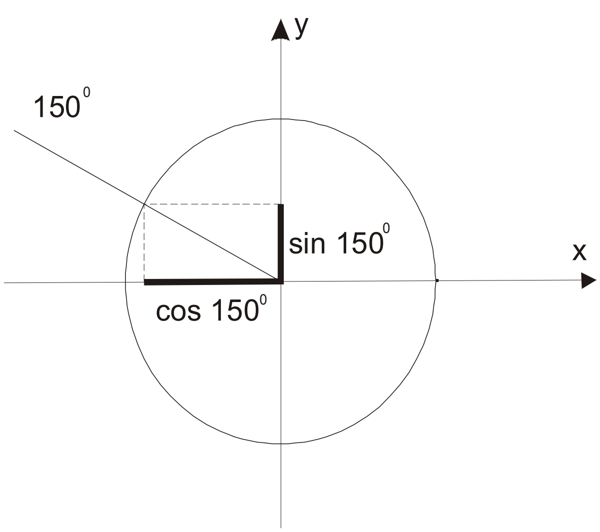


Kako ugao od 60^0 nije sredina kvadranta, to će vrednosti za $\sin 60^0$ i $\cos 60^0$ biti $\frac{1}{2}$ i $\frac{\sqrt{3}}{2}$ i to obe pozitivne.Pošto je crta za $\sin 60^0$ **duža**, ona mora biti $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (jer je veći broj) a $\cos 60^0$ je $\frac{1}{2}$ jer je crta tu kraća.

Dakle: $\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

Primer 2.

Nađi $\sin 150^0$ i $\cos 150^0$

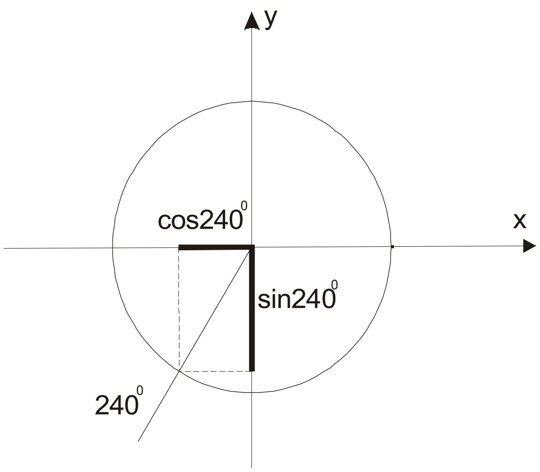


Crta za $\sin 150^0$ je kraća i pozitivna a crta za $\cos 150^0$ je duža i negativna, pa je : $\sin 150^0=\frac{1}{2}$ a $\cos 150^0= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Primer 3.

Nađi $\sin\frac{4\pi}{3}$ i $\cos\frac{4\pi}{3}$.

Ako date uglove u radijanima prebacimo u stepene, dobijamo da je to $\frac{4\pi}{3} = 240^0$

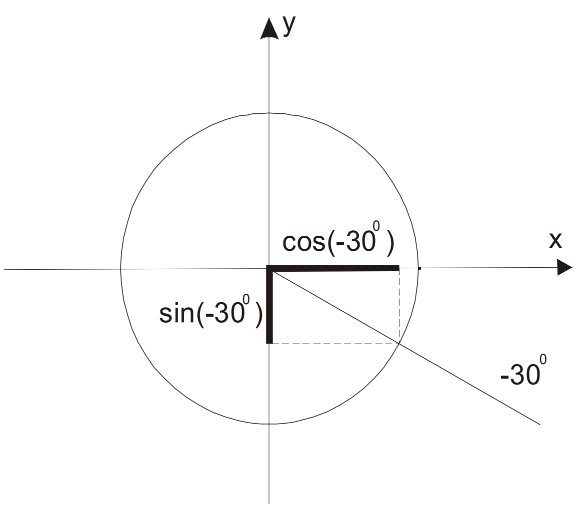


Znači, radi se o uglu u trećem kvadrantu i nije sredina kvadranta. Primetićemo da su obe vrednosti negativne, sinus je duži a kosinus kraći. Zaključujemo: $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

Primer 4.

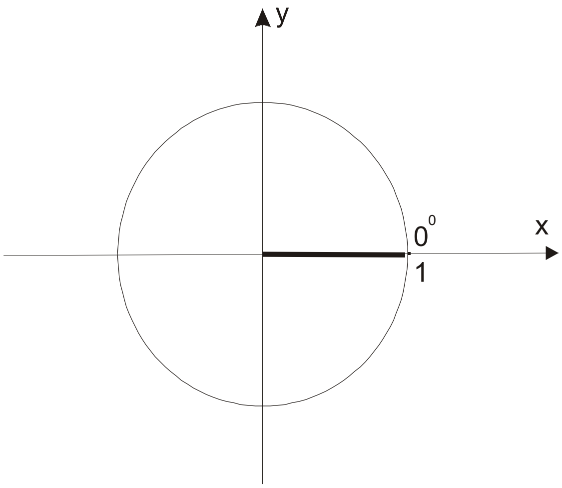
Nađi $\sin(-30^0)$ i $\cos(-30^0)$

Ovaj ugao, pošto je negativan ide u smeru kazaljke na satu. U pozitivnom smeru to bi bio ugao od 330^0.

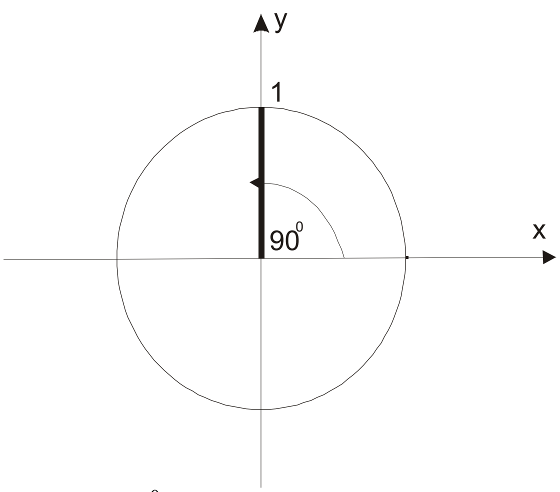


$\sin(-30^0) = \sin 330^0 = -\frac{1}{2}$ i $\cos(-30^0) = \cos 330^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

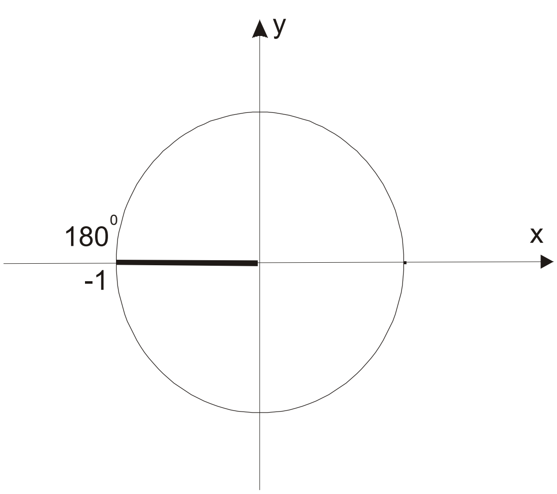
Da pogledamo šta je sa uglovima od $\mathbf{0}$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ (granični uglovi)



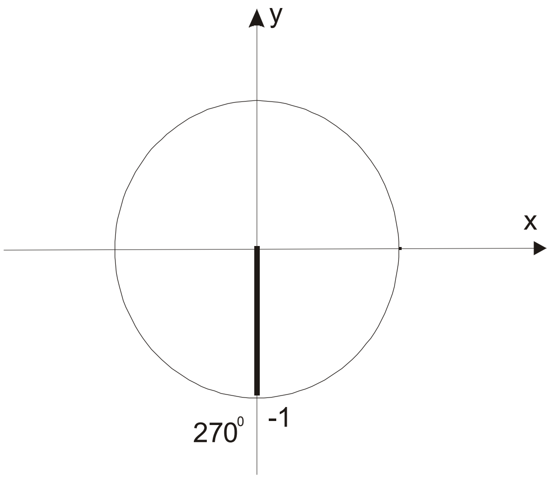
Kraci ovog ugla se poklapaju , x-osu seku do jedinice, a y-osu nigde, zato je **$\cos 0^0=1$** (cela crta) a **$\sin 0^0=0$** (nema crte)



Ugao od 90^0 seče y- osu po celoj crti a x- osu nigde. Pa je **$\sin 90^0=1$** a **$\cos 90^0=0$**



$\sin 180^0=0$ **$\cos 180^0= - 1$**



sin270^0=-1   cos 270^0=0

Tangens i kontangens proizvoljnog ugla

Već smo se ranije upoznali sa formulama $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ i $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, naravno pod uslovima da su imenioci različiti od nule.

Možemo zaključiti da je **tg**α definisan za $\cos\alpha \neq 0$,odnosno za $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$**+k** π **,** $\boldsymbol{k \in Z}$

A ctgα za $\sin\alpha \neq 0$, odnosno za $\alpha \neq$ **k** π **,** $\boldsymbol{k \in Z}$

To znači da ako znamo da nađemo $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, znamo tgα i ctgα

Primer 1.

Nađi:

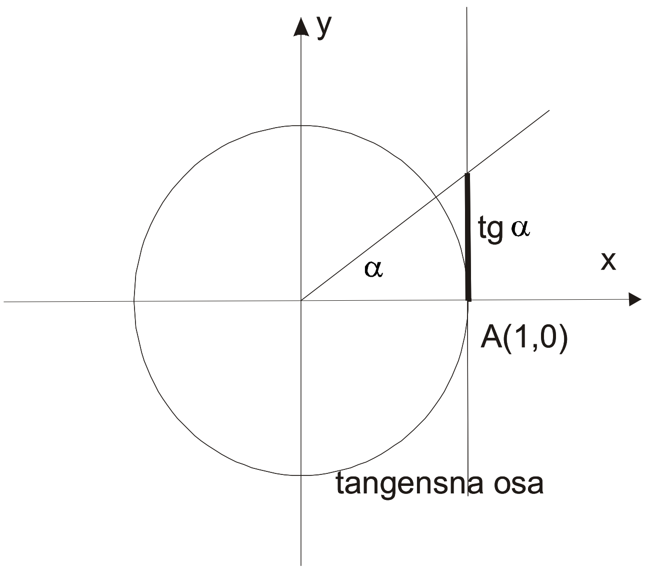
a) $tg\frac{\pi}{4}$
b) ctg 300^0

a) $tg\frac{\pi}{4} = tg\ 45^0 = \frac{\sin 45^0}{\cos 45^0} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

b) $ctg\ 300^0 = \frac{\cos 300^0}{\sin 300^0} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

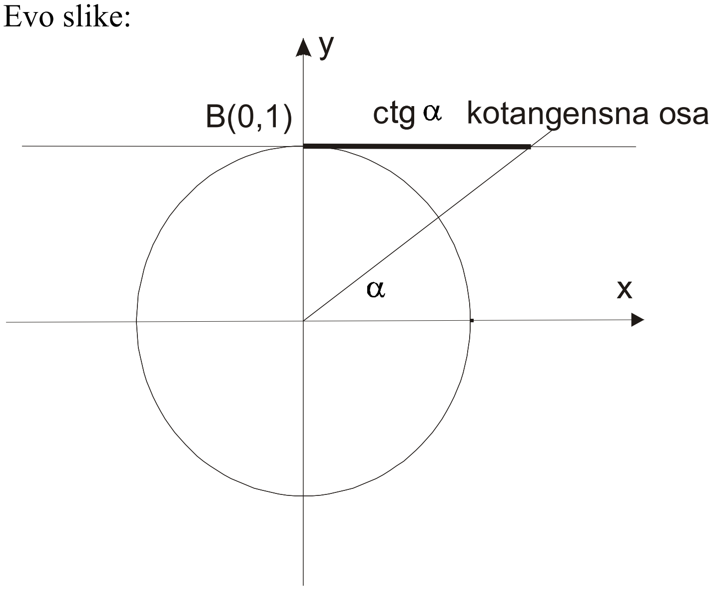
Naučimo sada gde se čitaju tangensi i kotangensi na trigonometrijskom krugu.

Uočimo pravu x = 1 . Ona očigledno prolazi kroz tačku A(1,0) i paralelna je sa y- osom.Jedan krak datog ugla α opet poklopimo sa x- osom a drugi krak će seći ovu pravu x = 1 koju ćemo zvati **TANGENSNA osa** . Odsečak na tangensnoj osi je ustvari vrednost za tgα . Evo to na slici:



Uočimo sada pravu y=1 koja prolazi kroz tačku B(0,1) i paralelna je x- osi. Tu pravu ćemo zvati **KOTANGENSNA osa** i na njoj ćemo očitavati vrednost za kotangense uglova.

Evo slike:



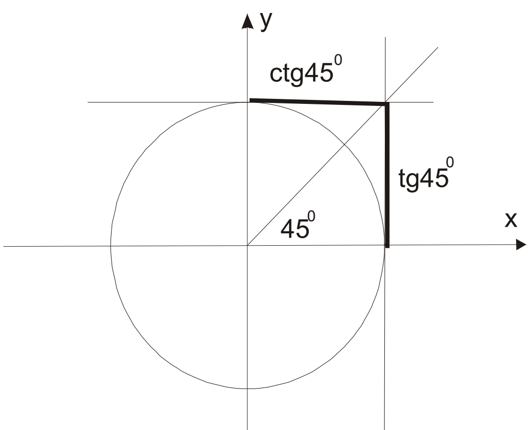
Ovde razmišljamo slično kao za sinuse i cosinuse, samo **moramo da zapamtimo nova tri broja :**

$$\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad 1, \qquad \sqrt{3}$$

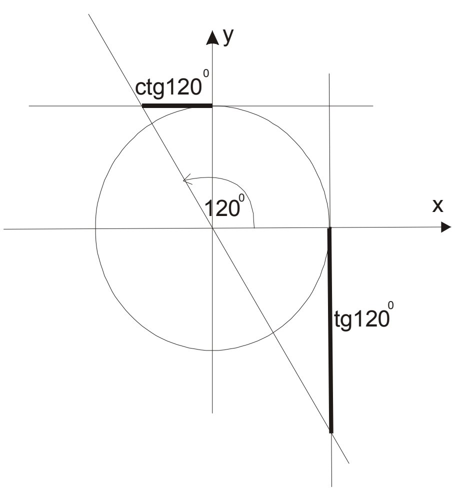
Broj 1, pozitivan ili negativan je vrednost za tangense i kotangense uglova koji su sredine kvadranata, tj. za 45, 135, 225 i 315 stepeni a za ostale uglove gledamo dužinu CRTA koje odsecaju na tangensnoj i kotangesnoj osi i da li je pozitivna ili negativna.

Veća crta je $\sqrt{3}$, a manja je $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Evo nekoliko primera:



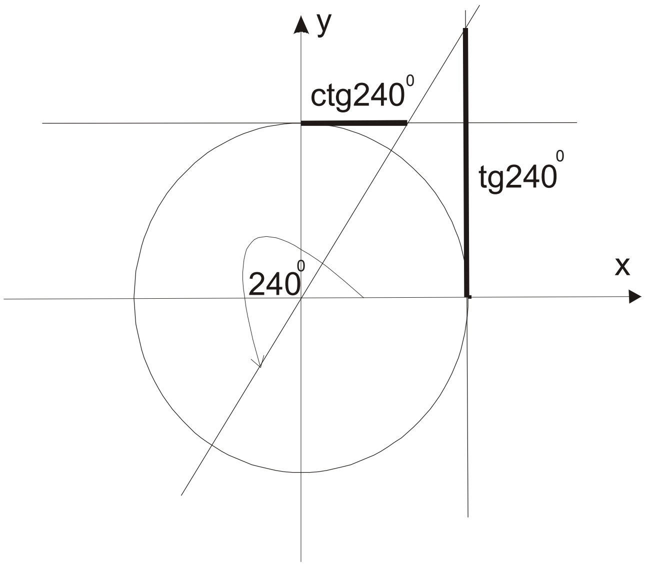
$tg45^0=1$ i $ctg45^0=1$ Sredina kvadranta je u pitanju, pa su vrednosti 1.



PAZI:

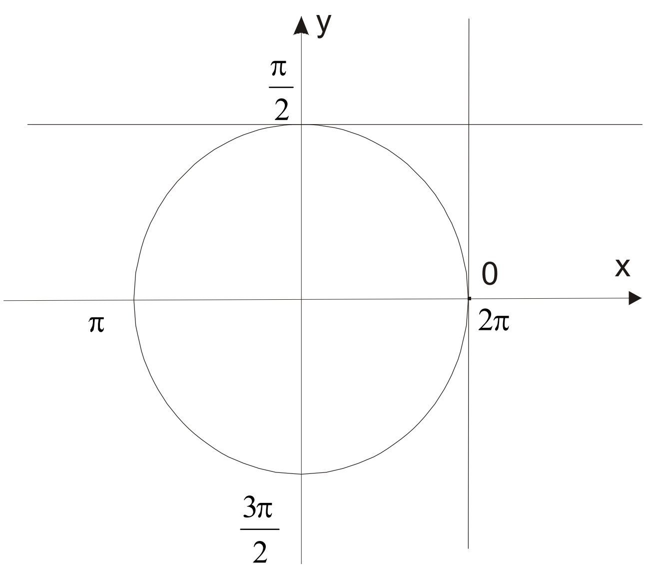
Pošto krak ugla ne seče tangensnu osu, moramo ga produžiti do preseka sa osom.
Uočimo da su obe vrednosti negativne i da je tangens duži a kotangens kraći!

Dakle : $tg\ 120^0= -\ \sqrt{3}$ i $ctg\ 120^0= -\ \frac{\sqrt{3}}{3}$



$tg240^0 = \sqrt{3}$ i $ctg\ 240^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (uoči dužine ovih podebljanih crta)

Šta je sa graničnim uglovima?

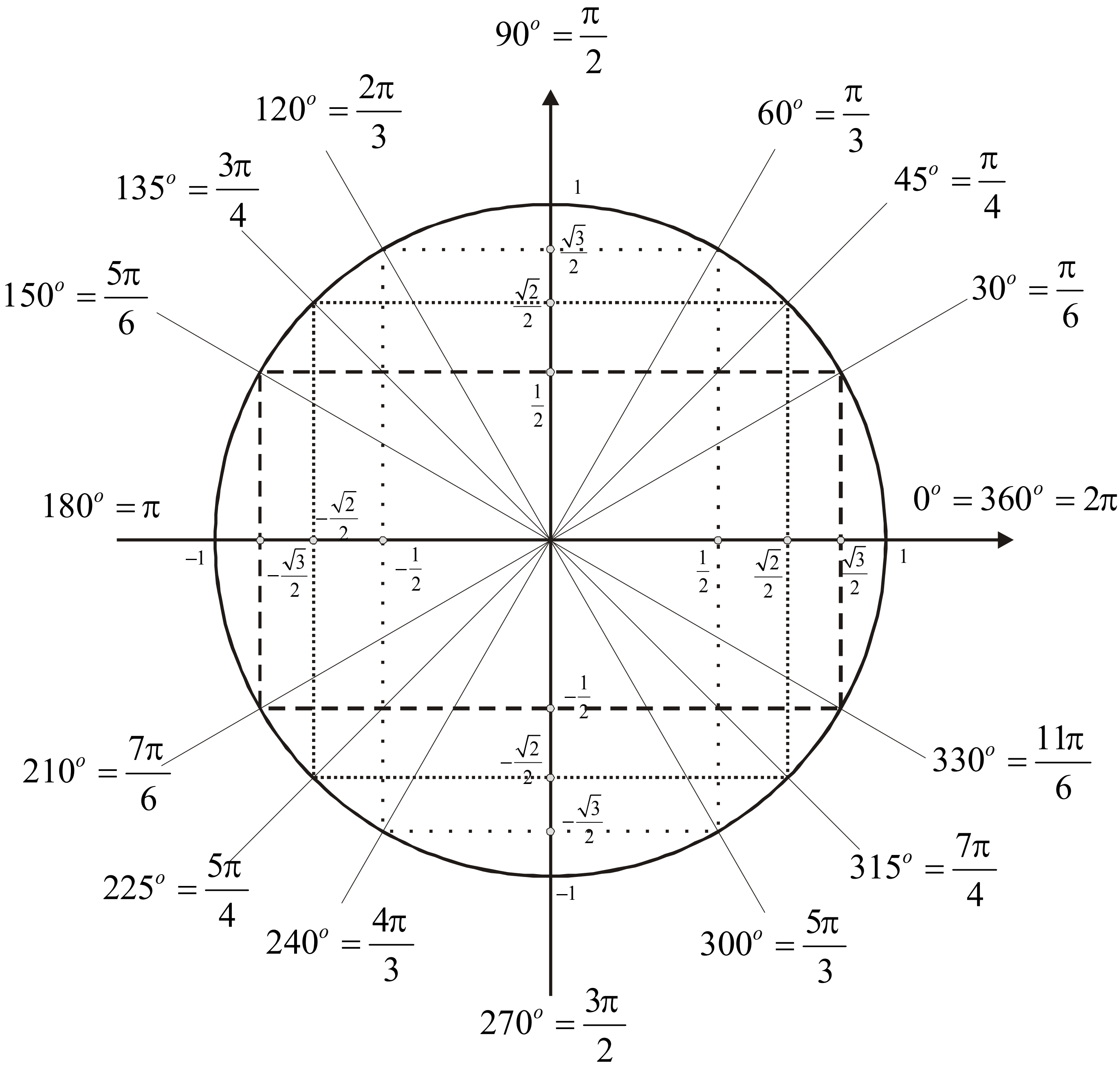


Za 0 stepeni vidimo da ugao ne seče nigde tangensnu osu , pa je $tg0^0=0$, za $ctg0^0$ krak i kotangensna osa idu paralelno, pa kažemo da ctg *x* teži beskonačnosti kad *x* teži nuli u pozitivnom smeru.

Slično je za ugao od 180^0. Opet je tangens nula a kotangens teži $-\infty$.

Za ugao od 90^0 je obrnuta situacija: $ctg90^0=0$ a $tg90^0$ teži $+\infty$.

Za ugao od 270^0 je $ctg270^0=0$ a $tg270^0$ teži $-\infty$.


$90^o = \frac{\pi}{2}$
$120^o = \frac{2\pi}{3}$
$60^o = \frac{\pi}{3}$
$135^o = \frac{3\pi}{4}$
$45^o = \frac{\pi}{4}$
$150^o = \frac{5\pi}{6}$
$30^o = \frac{\pi}{6}$
$180^o = \pi$
$0^o = 360^o = 2\pi$
$210^o = \frac{7\pi}{6}$
$330^o = \frac{11\pi}{6}$
$225^o = \frac{5\pi}{4}$
$315^o = \frac{7\pi}{4}$
$240^o = \frac{4\pi}{3}$
$300^o = \frac{5\pi}{3}$
$270^o = \frac{3\pi}{2}$
1
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
-1
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
1
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
-1