

# SISTEMI LOGARITAMSKIH JEDNAČINA

## 1. Rešiti sistem jednačina

$$3^x \cdot 2^y = 576$$

$$\log_2(y-x) = 2$$

**Rešenje:**

**Uvek kad imate logaritme, najpre postavite uslov!**

**Za ovaj zadatak je  $y-x > 0 \rightarrow y > x$**

**Iz druge jednačine ćemo izraziti jednu nepoznatu i zameniti je u prvu jednačinu:**

$$\log_2(y-x) = 2$$

$$y-x = 2^2$$

$$y-x = 4 \rightarrow y = x+4$$

**Sad ovo zamenimo u prvu jednačinu:**

$$3^x \cdot 2^{x+4} = 576$$

$$y = x+4$$

$$3^x \cdot 2^{x+4} = 576$$

$$3^x \cdot 2^x \cdot 2^4 = 576$$

$$(3 \cdot 2)^x \cdot 16 = 576$$

$$6^x = \frac{576}{16}$$

$$6^x = 36$$

$$6^x = 6^2 \rightarrow x = 2$$

**Sad nije teško naći :**

$$y = x + 4$$

$$y = 2 + 4$$

$$y = 6$$

$$(x, y) = (2, 6)$$

**Rešenje zadovoljava uslov  $y > x$  pa je DOBRO!**

## 2. Rešiti sistem jednačina

$$\log_4 x = \log_2 y$$

$$x^2 - 5y^2 = -4$$

**Rešenje:**

**Uslovi zadatka** su  $x > 0 \wedge y > 0$ , pa kad nadujemo rešenje( rešenja) ,ona moraju da zadovoljavaju ove uslove....

**Prvu jednačinu ćemo malo srediti :**

$$\log_4 x = \log_2 y$$

$$\log_{2^2} x = \log_2 y$$

$$\frac{1}{2} \log_2 x = \log_2 y \dots\dots / *2$$

$$\log_2 x = 2 \log_2 y$$

$$\log_2 x = \log_2 y^2 \dots\dots / \text{antilogaritmovanje}$$

$$\boxed{x = y^2}$$

**Vratimo se u drugu jednačinu početnog sistema:**

$$x^2 - 5y^2 = -4$$

$$x = y^2$$

$$(y^2)^2 - 5y^2 = -4$$

$$y^4 - 5y^2 + 4 = 0 \rightarrow \text{smena } y^2 = t$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \rightarrow t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \rightarrow t_1 = 4, t_2 = 1$$

$$y^2 = t \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$$

$$y^2 = t \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$$

**Kako su nam uslovi zadatka**  $x > 0 \wedge y > 0$  **to zaključujemo da je :**

$$y = 2 \vee y = 1$$

**Kako je**  $x = y^2$  **dobijamo da je** za  $y = 2$  je  $x = 4$  i za  $y = 1$  je  $x = 1$

**Rešenja sistema su :** **( 1,1 ) i ( 4,2 )**

### 3. Rešiti sistem jednačina

$$x^{\log y} = 25$$

$$xy = 500$$

**Rešenje:**

**Uslov zadatka je**  $y > 0$

**Moramo logaritmovati obe jednačine ( naravno, za osnovu 10 )**

$$x^{\log y} = 25 \dots\dots\dots / \log$$

$$xy = 500 \dots\dots\dots / \log$$

$$\log x^{\log y} = \log 25$$

$$\log xy = \log 500$$

$$\log y \cdot \log x = \log 5^2$$

$$\log x + \log y = \log 5 \cdot 100$$

$$\log y \cdot \log x = 2 \log 5$$

$$\log x + \log y = \log 5 + \log 10^2$$

$$\log y \cdot \log x = 2 \log 5$$

$$\log x + \log y = \log 5 + 2 \log 10$$

$$\log y \cdot \log x = 2 \log 5$$

$$\log x + \log y = \log 5 + 2$$

**Sad je najbolje uzeti smene :**  $\log x = a \wedge \log y = b$  , **pa sistem postaje:**

$$a \cdot b = 2 \log 5$$

$$a + b = \log 5 + 2 \rightarrow b = \log 5 + 2 - a \rightarrow \text{zamenimo u prvu}$$

$$a \cdot (\log 5 + 2 - a) = 2 \log 5$$

$$a \log 5 + 2a - a^2 - 2 \log 5 = 0$$

$$-a^2 + a \log 5 + 2a - 2 \log 5 = 0$$

$$-a^2 + a(\log 5 + 2) - 2 \log 5 = 0 \dots\dots\dots / *(-1)$$

$$\boxed{a^2 - a(\log 5 + 2) + 2 \log 5 = 0}$$

**Dobili smo kvadratnu jednačinu po a.**

**Najbolje je da najpre nadjemo diskriminantu.....**

$$a^2 - a(\log 5 + 2) + 2 \log 5 = 0$$

$$A = 1$$

$$B = -(\log 5 + 2)$$

$$C = 2 \log 5$$

$$D = B^2 - 4AC$$

$$D = (-(\log 5 + 2))^2 - 4 \cdot 2 \log 5$$

$$D = \log^2 5 + 4 \log 5 + 4 - 8 \log 5$$

$$D = \log^2 5 - 4 \log 5 + 4$$

$$D = (\log 5 - 2)^2$$

Ovde moramo da pazimo!

$$\log 5 \approx 0,69$$

Kad pakujete pun kvadrat UVEK PRVO STAVITE VEĆI BROJ!

Znači da je

$$D = (\log 5 - 2)^2 = \boxed{(2 - \log 5)^2}$$

$$a_{1,2} = \frac{\log 5 + 2 \pm (2 - \log 5)}{2}$$

$$a_1 = \frac{\log 5 + 2 + 2 - \log 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$a_2 = \frac{\log 5 + 2 - 2 + \log 5}{2} = \frac{2 \log 5}{2} = \log 5$$

Vratimo se u smenu da nadjemo najpre  $a$ :

$$\boxed{\log x = a} \wedge \log y = b$$

$$\log x = 2 \rightarrow x = 10^2 \rightarrow \boxed{x = 100}$$

$$\log x = \log 5 \rightarrow \boxed{x = 5}$$

Sad da nadjemo  $y$ :

$$b = \log 5 + 2 - a$$

$$a = 2$$

$$b = \log 5 + 2 - 2$$

$$\log y = \log 5$$

$$\boxed{y = 5}$$

$$a = \log 5$$

$$b = \log 5 + 2 - \log 5$$

$$\log_{10} y = 2$$

$$\boxed{y = 100}$$

Rešenja sistema su (100,5) i (5, 100)

#### 4. Rešiti sistem jednačina

$$7^{\log_3 x} - 3^{\log_9 y} = 40$$

$$7^{\log_3 \sqrt{x}} - 3^{\log_{81} y} = 4$$

**Rešenje:**

Drugu jednačinu moramo malo prepraviti, pa ćemo uzeti smene....

$$7^{\log_3 \sqrt{x}} - 3^{\log_{81} y} = 4$$

$$7^{\log_3 x^{\frac{1}{2}}} - 3^{\log_{9^2} y} = 4$$

$$7^{\frac{1}{2} \log_3 x} - 3^{2 \log_9 y} = 4$$

$$\left(7^{\log_3 x}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(3^{\log_9 y}\right)^2 = 4$$

Vratimo se u sistem:

$$7^{\log_3 x} - 3^{\log_9 y} = 40$$

$$\left(7^{\log_3 x}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(3^{\log_9 y}\right)^2 = 4$$

$$7^{\log_3 x} = a \wedge 3^{\log_9 y} = b \rightarrow \text{smene}$$

$$a - b = 40$$

$$\underline{a^{\frac{1}{2}} - b^2 = 4}$$

Sad mali trik:

$$\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} = 40 \rightarrow \text{razlika kvadrata}$$

$$\underline{\sqrt{a} - \sqrt{b} = 4}$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 40$$

$$\underline{\sqrt{a} - \sqrt{b} = 4}$$

$$4(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 40$$

$$\underline{\sqrt{a} - \sqrt{b} = 4}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{a} + \sqrt{b} = 10 \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} = 4 \end{array} \right\} +$$

$$2\sqrt{a} = 14$$

$$\sqrt{a} = 7 \rightarrow \boxed{a = 49}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 10 \rightarrow \sqrt{b} = 3 \rightarrow \boxed{b = 9}$$

Vratimo se sad na početne smene:

$$7^{\log_3 x} = a \wedge 3^{\log_9 y} = b$$

$$7^{\log_3 x} = 49 \wedge 3^{\log_9 y} = 9$$

$$7^{\log_3 x} = 7^2 \wedge 3^{\log_9 y} = 3^2$$

$$\log_3 x = 2 \wedge \log_9 y = 2$$

$$x = 3^2 \wedge y = 9^2$$

$$x = 9 \wedge y = 81$$

$$\boxed{(x, y) = (9, 81)}$$

Naravno, uslovi zadatka su ( zbog logaritama ) da je  $x > 0 \wedge y > 0$

**a naše rešenje to zadovoljava!**

[www.matematiranje.in.rs](http://www.matematiranje.in.rs)