LOGARITAMSKA FUNKCIJA

Funkcija **<u>inverzna</u>** eksponencijalnoj funkciji $y = a^x \quad (a \neq 1, a > 0, a \in R)$ naziva se logaritamska funkcija. Označava se sa:

$$\boxed{y = \log_a x}$$

(čita se logaritam od x za osnovu a)

Ako je $a = e \rightarrow$ y = ln$x$
Ako je a=10 $\rightarrow$ y = log$x$ ili neki profesori pišu y = lg x

<u>Za osnovne logaritamske funkcije važi:</u>

1) Funkcije su definisane za $x \in (0, \infty)$
2) <u>Nula funkcije</u> je x = 1 tj. grafik seče x-osu u tački A(1,0)
3) <u>Monotonost</u> (rašćenje i opadanje) **VAŽNO!**
   a) Ako je osnova $a > 1$ funkcija je <u>rastuća</u>
   b) Ako je osnova $0 < a < 1$ funkcija je <u>opadajuća</u>
4) <u>Znak funkcije:</u>

   a) Ako je osnova $a > 1$, znak je:
      $y > 0$ za $x \in (1, \infty)$
      $y < 0$ za $x \in (0,1)$
   b) Ako je osnova $0 < a < 1$, znak je:
      $y > 0$ za $x \in (0,1)$
      $y < 0$ za $x \in (1, \infty)$

Evo par primera osnovnih grafika:

Primer 1. Skicirati grafik funkcije $y = \log_2 x$

Napravimo tablicu, ali vrednosti za x biramo pametno x = $\{1,2,4,8, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\}$

Videćemo zašto!

Ideja je da se koriste osnovna svojstva logaritama….

Za x=1 $\Rightarrow y = \log_2 1 = 0$

Za x=2 $\Rightarrow y = \log_2 2 = 1$

Za x=4 $\Rightarrow y = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2\log_2 2 = 2 \cdot 1 = 2$

Za x=8 $\Rightarrow y = \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$

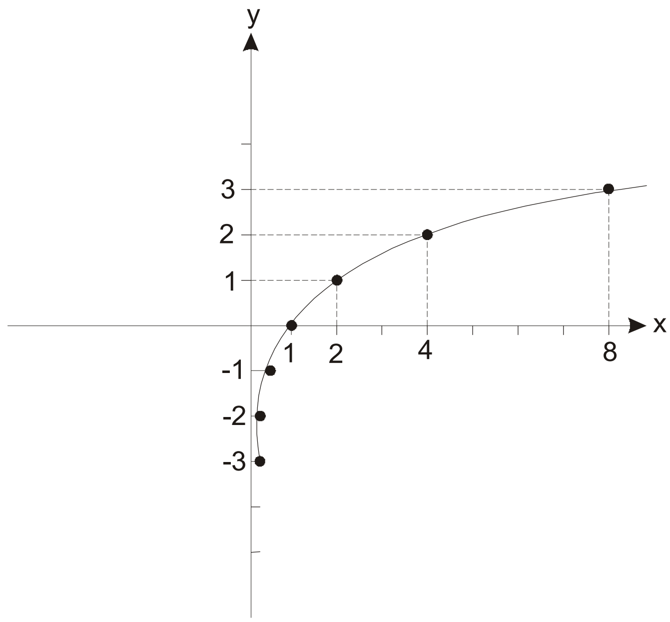
Za x=$\frac{1}{2}$ $\Rightarrow y = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1 \cdot \log_2 2 = -1 \cdot 1 = -1$

Za x=$\frac{1}{4}$ $\Rightarrow y = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$

Za x=$\frac{1}{8}$ $\Rightarrow y = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

Sad ove tačke nanesemo na grafik:



Kako je $a = 2 > 0$ ona je rastuća!

Primer 2. Skicirati grafik funkcije $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Ajmo najpre da malo " prepravimo" funkciju koristeći svojstvo logaritma: $\log_{a^s} x = \frac{1}{s}\log_a x$

$y = \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{2^{-1}} x = \frac{1}{-1}\log_2 x \to \boxed{y = -\log_2 x}$

Slično kao malopre pravimo tablicu, birajući pametno vrednosti za x:

Za x=1 $\Rightarrow y = -\log_2 1 = 0$

Za x=2 $\Rightarrow y = -\log_2 2 = -1$

Za x=4 $\Rightarrow y = -\log_2 4 = -\log_2 2^2 = -2\log_2 2 = -2 \cdot 1 = -2$

Za x=8 $\Rightarrow y = -\log_2 2^3 = -3\log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3$

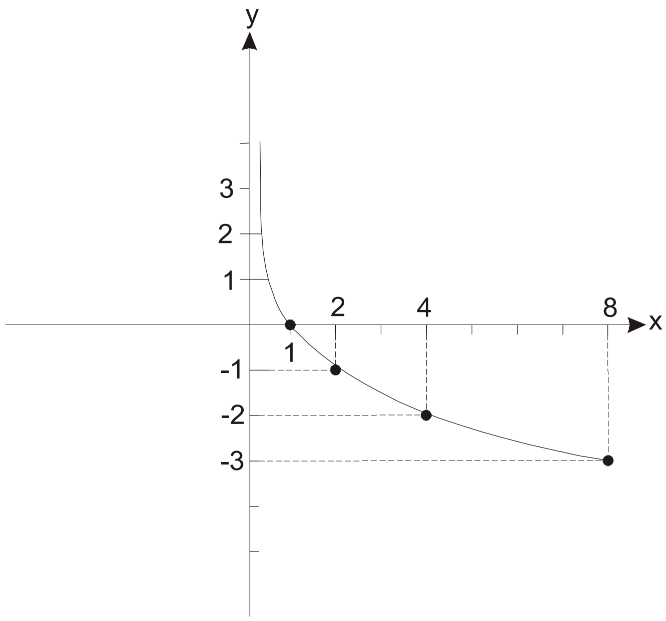
Za x=$\frac{1}{2}$ $\Rightarrow y = -\log_2 \frac{1}{2} = -\log_2 2^{-1} = -(-1) \cdot \log_2 2 = +1 \cdot 1 = 1$

Za x=$\frac{1}{4}$ $\Rightarrow y = -\log_2 \frac{1}{4} = -\log_2 2^{-2} = -(-2) = 2$

Za x=$\frac{1}{8}$ $\Rightarrow y = 3$

Ubacimo ove vrednosti u tablicu:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	3	2	1	0	-1	-2	-3



Dakle, kad je osnova $a = \frac{1}{2}$ izmedju 0 i 1 grafik je opadajući!

Za malo složenije grafike je moguće izvršiti pomeranje duž x i y-ose (slično kao kod kvadratne funkcije) ali za ozbiljnije zadatke će nam biti potrebno znanje iz IV godine srednje škole.

Primer 3. Data je funkcija $y = \log_a(3x^2 - 2x) \quad (a > 0, a \neq 1)$

a) Za koje vrednosti argumenata x funkcija ima smisla u skupu realnih brojeva?
b) Odrediti nule date funkcije
c) Odrediti x tako da za osnovu $a = \sqrt{5}$ vrednost funkcije bude 2.

<u>Rešenje:</u> $y = \log_a(3x^2 - 2x)$

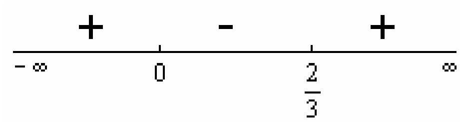
<u>Pazi:</u> ***Sve iza log mora biti > 0***

Znači: $3x^2 - 2x > 0 \rightarrow$ upotrebimo znanje iz kvadratne nejednačine! (podseti se)

Najpre rešimo kvadratnu jednačinu pa : kvadratni trinom ima znak broja ***a*** svuda osim

izmedju nula (rešenja)

$$3x^2-2x=0$$
$$x_{1,2}=\frac{2\pm 2}{6}$$
$$x_1=0$$
$$x_2=\frac{2}{3}$$



***a* = 3 > 0**

Pa je oblast definisanosti: $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{3},\infty\right)$

b) Nule f-je su rešenja jednačine y = 0

Znači: $\log_a(3x^2-2x)=0$ Kako je $\log_a 1=0$ to mora biti:

$$3x^2-2x=1$$
$$3x^2-2x-1=0$$
$$x_{1,2}=\frac{2\pm 4}{6}$$
$$x_1=1$$
$$x_2=-\frac{1}{3}$$

Ova funkcija ima nule $x_1=1$ i $x_2=-\frac{1}{3}$

c) $y=\log_a(3x^2-2x)=0$ $\left.\begin{array}{l} a=\sqrt{5} \\ y=2 \end{array}\right\}$ zamenimo

$$\log_{\sqrt{5}}(3x^2-2x)=2$$

Idemo po definiciji $\log_A B=\otimes \Leftrightarrow B=A^{\otimes}$

$$3x^2-2x=\sqrt{5}^2$$
$$3x^2-2x=5$$
$$3x^2-2x-5=0$$
$$x_{1,2}=\frac{2\pm 8}{6}$$
$$x_1=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$
$$x_2=\frac{-6}{6}=-1$$

oblast definisanosti smo našli pod **a):** $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{3},\infty\right)$ pa su oba rešenja dobra!

Primer 4. Odrediti nule funkcije: $y=\log_3\left(\sqrt{x^2+21}-\sqrt{x^2+12}\right)$

Rešenje:

Najpre razmislimo o oblasti definisanosti (sve iza **log** mora da je > 0)

$$\sqrt{x^2+21}-\sqrt{x^2+12}>0$$

Ovo uvek važi!

Zašto?

$$\sqrt{x^2+12+7}-\sqrt{x^2+12}>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+12+7}>\sqrt{x^2+12}$$

Prva potkorena veličina je sigurno veća od druge, pa je njihova razlika uvek pozitivna!

Sad tražimo nule:

$$\log_3\left(\sqrt{x^2+21}-\sqrt{x^2+12}\right)=0$$
$$\sqrt{x^2+21}-\sqrt{x^2+12}=1$$

Ovo je iracionalna jednačina (pogledajte taj istoimeni fajl)

$$\sqrt{x^2+21}=\sqrt{x^2+12}+1 \text{...................} \textit{kvadriramo}$$
$$x^2+21=\left(\sqrt{x^2+12}+1\right)^2$$
$$\cancel{x^2}+21=\cancel{x^2}+12+2\sqrt{x^2+12}+1$$
$$2\sqrt{x^2+12}=21-12-1$$
$$2\sqrt{x^2+12}=8$$
$$\sqrt{x^2+12}=4 \text{...................} \textit{kvadriramo}$$
$$x^2+12=16$$
$$x^2=4\rightarrow x=\pm\sqrt{4}\rightarrow \boxed{x_1=-2}\wedge\boxed{x_2=2}$$

Uslovi za iracionalnu jednačinu bi bili $x^2+21>0\wedge x^2+12>0$ što važi za svako x pa ne predstavlja nikakva ograničenja.