KVADRATNA FUNKCIJA

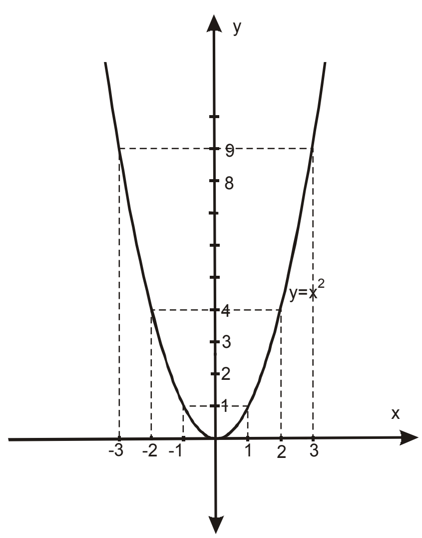
Kvadratna funkcija je oblika:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Gde je $x \in R$, $a \neq 0$ i $a, b\ i\ c$ su realni brojevi.
Kriva u ravni koja predstavlja grafik funkcije $y = ax^2 + bx + c$ je **parabola**.

Najpre ćemo naučiti kako izgleda grafik funkcije $y = x^2$. Napravićemo tablicu za neke vrednosti promenljive x.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



za $\underline{x = -3}$ je $y = (-3)^2 = 9$

za $\underline{x = -2}$ je $y = (-2)^2 = 4$

za $\underline{x = -1}$ je $y = (-1)^2 = 1$

za $\underline{x = 0}$ je $y = 0^2 = 0$

za $\underline{x = 1}$ je $y = 1^2 = 1$

za $\underline{x = 2}$ je $y = 2^2 = 4$

za $\underline{x = 3}$ je $y = 3^2 = 9$

Ovaj grafik će nam uvek služiti kao “početni”. Šta se dešava ako ispred x^2 ima neki broj?

Naučimo sad grafik $y = ax^2$

Razlikovaćemo 2 situacije: $a > 0$ i $a < 0$

za $a > 0$

Ovde je parabola okrenuta “ otvorom nagore’’. Šta se dešava ako je $a > 1$ i $0 < a < 1$?

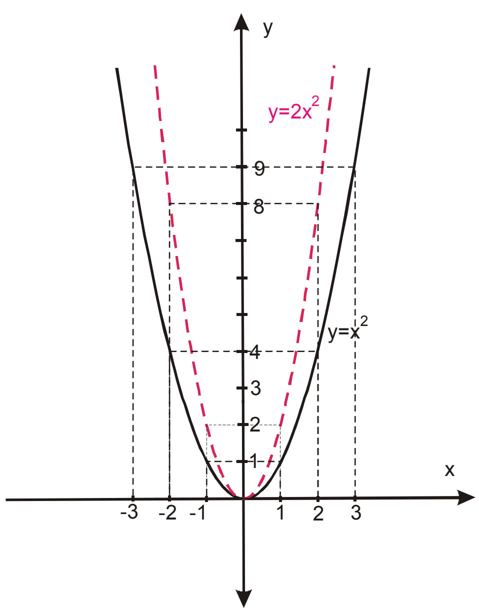
$a > 1$

U odnosu na početni grafik $y = x^2$, ovaj grafik $y = ax^2$ se “ sužava’’

Primer

$y = 2x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	18	8	2	0	2	8	18



Što je broj *a* veći to je grafik uži!

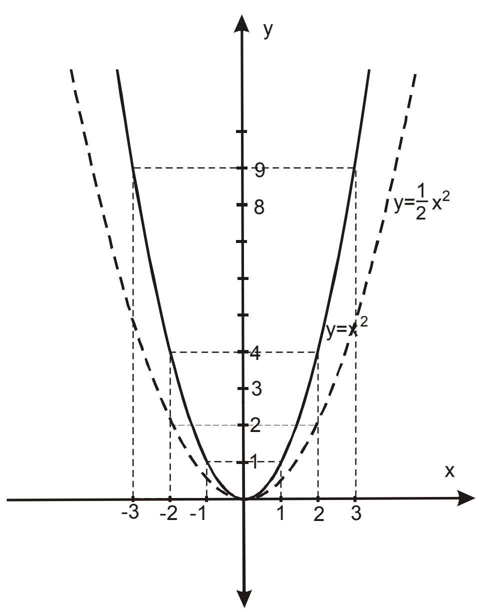
$\underline{0 < a < 1}$

U odnosu na početni grafik $y = x^2$, ovaj grafik $y = ax^2$ se " širi''

Primer

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$



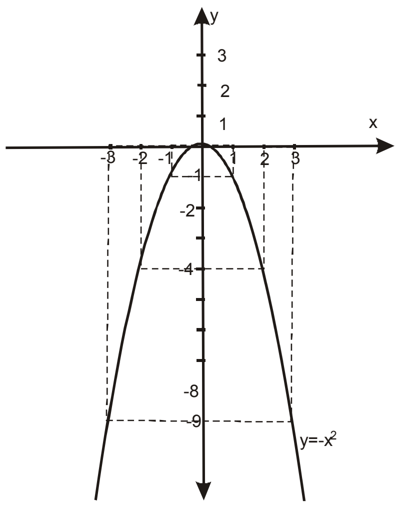
Što je broj *a* bliži nuli, grafik je širi!

Za $a < 0$ parabola je okrenuta "otvorom nadole''.

Početni grafik je $y = -x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

Evo grafika funkcije $y = -x^2$



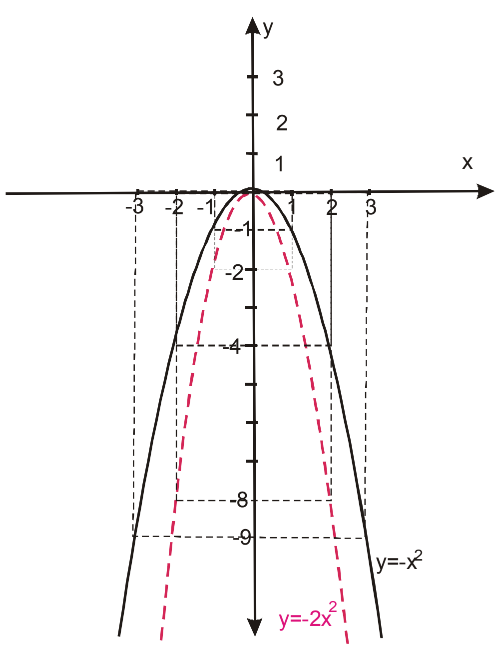
Opet ćemo razmotriti 2 situacije:

U odnosu na početni $y = -x^2$ grafik se " sužava'' ako je a < -1

<u>Primer</u>

$y = -2x^2$

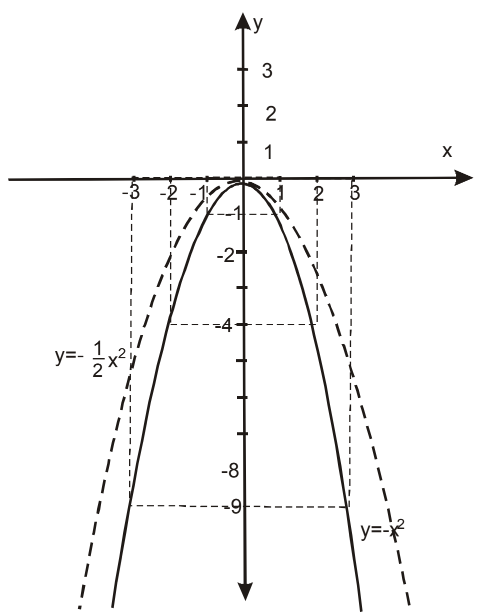
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18



Ako je
$-1 < a < 0$

U odnosu na početni grafik $y = -x^2$ grafik , na primer $y = -\frac{1}{2}x^2$ se " širi "

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$



Dobro, ovo za sad nije bilo "mnogo opasno". Naučimo sada da pomeramo finkciju duž y-ose. Posmatrajmo grafik:

$$\boxed{y = ax^2 + \beta}$$

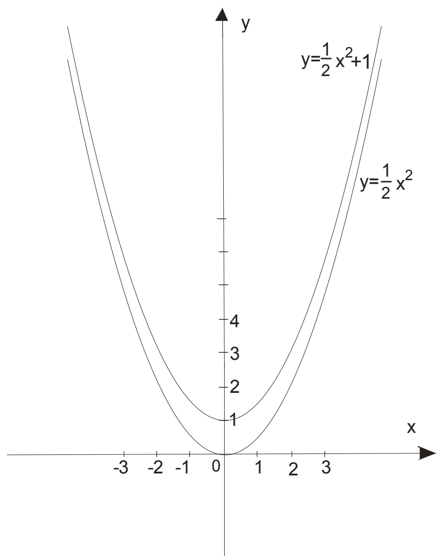
→ Prvo nacrtamo grafik funkcije $y = ax^2$

→ taj grafik pomeramo duž y-ose i to:

1) Ako je β pozitivan "podižemo" grafik, odnosno pomeramo ga u pozitivnom smeru y-ose.
2) Ako je β negativan, "spuštamo" grafik, odnosno pomeramo ga u negativnom smeru y-ose

Evo par primera:

Primer 1: $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

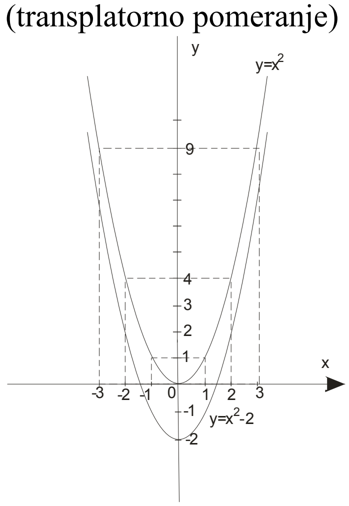


Prvo nacrtamo grafik $y = \frac{1}{2}x^2$, Zatim taj grafik "podignemo'' za +1, paralelnim pomeranjem (translacija)

Primer 2:

$$y = x^2 - 2$$

Znači, najpre nacrtamo grafik $y = x^2$. Potom taj grafik "spustimo'' za -2 duž y-ose (transplatorno pomeranje)



Nadam se da smo i ovo razumeli, jel tek sad ide "prava stvar". Naučimo da pomeramo funkciju i duž x-ose.

Posmatrajmo funkciju: $y=(x-\alpha)^2$

<u>Pazi:</u>

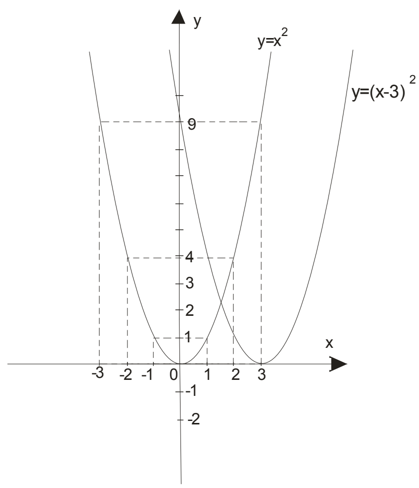
→ Ako je –α to znači da funkciju pomeramo za α po x-osi **<u>udesno</u>**.

→ Ako je +α to znači da finkciju pomeramo za α po x-osi **<u>ulevo</u>**

Ništa bez primera:

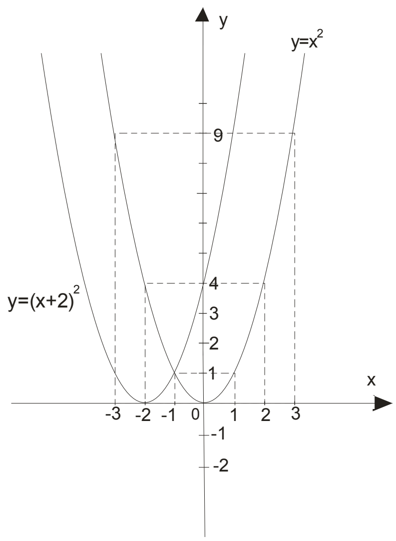
<u>Primer 1.</u> $y=(x-3)^2$

→ Znači pomeramo funkciju $y=x^2$ udesno za 3



<u>Primer 2.</u> $y=(x+2)^2$

→ Znači pomerimo funkciju $y=x^2$ ulevo za 2



Sada imamo znanje da nacrtamo ceo grafik funkcije $y = ax^2 + bx + c$.

Najpre moramo funkciju $y = ax^2 + bx + c$ svesti na takozvani <u>kanonski oblik.</u> Tu nam pomaže formula:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ili ako uvedemo da je:

$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ i $\beta = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ tj. $\beta = -\dfrac{D}{4a}$ dobijamo: $\boxed{y = a(x-\alpha)^2 + \beta}$ ***kanonski oblik***

Tačka $T(\alpha, \beta)$ je teme parabole.

<u>Dakle: (važno, ovo je postupak)</u>

→ Datu funkciju $y = ax^2 + bx + c$ najpre svedemo na kanonski oblik $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$

→ Nacrtamo grafik funkcije $y = ax^2$

→ Izvršimo pomeranje (transliranje) duž x–ose za α

→ Izvršimo pomeranje (transliranje) duž y-ose za β

Primer 1. Nacrtaj grafik funkcije:

$$y = x^2 - 6x + 5$$

→ Svedemo je na kanonski oblik:

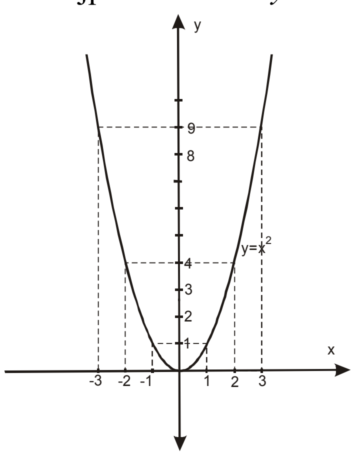
$a = 1$ $\qquad \alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2 \cdot 1} = 3$

$b = -6$

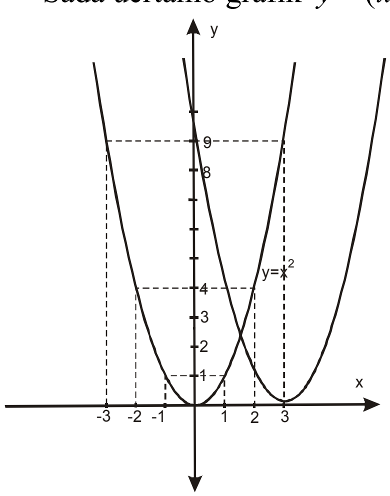
$c = 5$ $\qquad \beta = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = \dfrac{4 \cdot 1 \cdot 5 - (-6)^2}{4 \cdot 1} = \dfrac{20 - 36}{4} = \dfrac{-16}{4} = -4$

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta$$
$$y = 1(x - 3)^2 + (-4)$$
$$y = (x - 3)^2 - 4$$

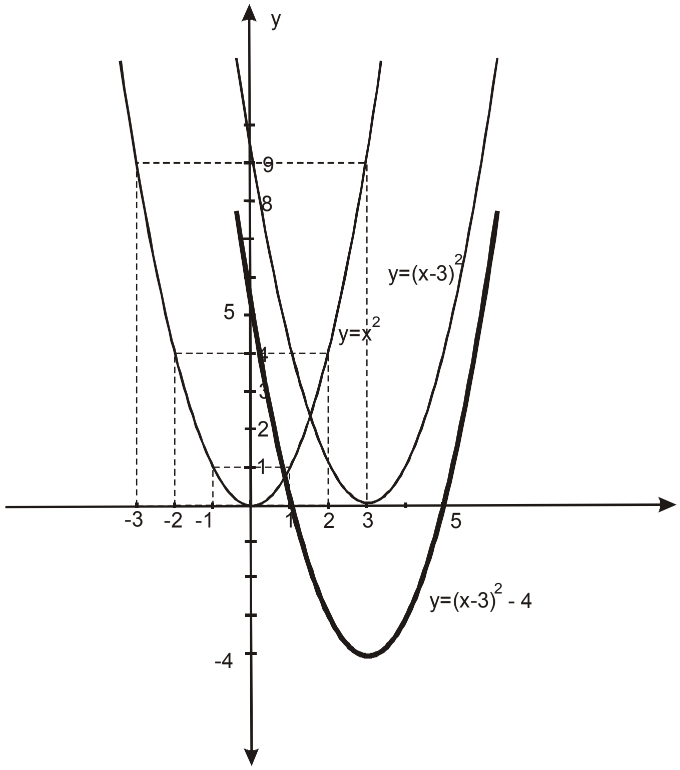
→ Najpre nacrtamo $y = ax^2$, odnosno $y = x^2$



→ Sada ucrtamo grafik $y = (x - 3)^2$, odnosno vršimo pomeranje za 3 ulevo



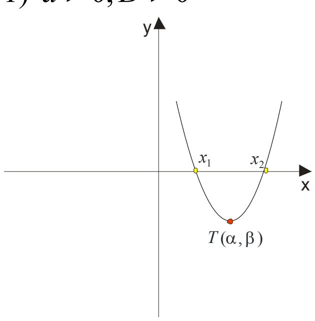
→ I najzad ucrtamo $y=(x-3)^2-4$ tako što grafik $y=(x-3)^2$ spustimo za 4 "nadole''



Ceo ovaj postupak je dosta "zamršen'' a nije baš ni mnogo precizan. Evo kako ćete mnogo brže i preciznije nacrtati grafik $y=ax^2+bx+c$ bez svodjenja na kanonski oblik i "pomeranja'':

Naš grafik će u zavisnosti od a (broja uz x^2) i diskriminante $D=b^2-4ac$ biti jedan od sledećih 6 grafika:

1) $a>0, D>0$



→ F-ja seče x-osu u x_1 i x_2

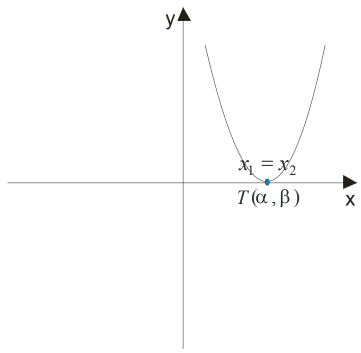
→ $y<0$ za $x\in(x_1,\ x_2)$ i $y>0$ za $x\in(-\infty,x_1)\cup(\ x_2,\infty)$

→ F-ja ima minimum u temenu $T(\alpha,\beta)$

→ F-ja raste za $x\in(\alpha,\infty)$

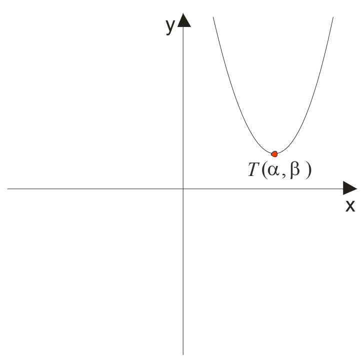
→ F-ja opada za $x\in(-\infty,\alpha)$

2) $a > 0, D = 0$



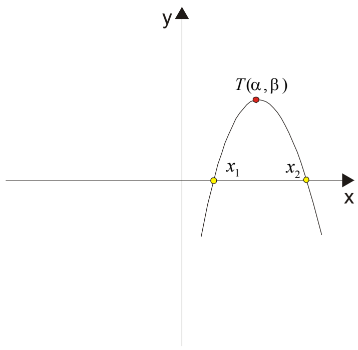
→ F-ja je definisana za $\forall x \in R$
→ F-ja seče x-osu u $x_1 = x_2$
→ $y \geq 0, \forall x \in R$
→ F-ja ima minimum u $T(\alpha, 0)$
→ F-ja raste za $x \in (\alpha, \infty)$
→ F-ja opada za $x \in (-\infty, \alpha)$

3) $a > 0, D < 0$



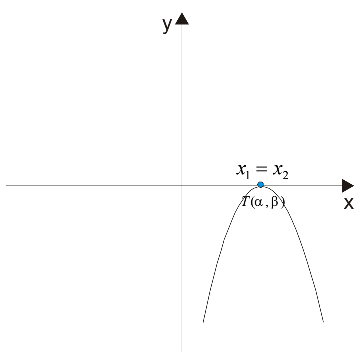
→ F-ja je definisana za $\forall x \in R$
→ F-ja ne seče x- osu ($x_{1,2}$ su konjugovano -kompleksni brojevi).
→ $y > 0, \; za \; \forall x \in R$
→ F-ja ima minimum u $T(\alpha, \beta)$
→ F-ja raste za $x \in (\alpha, \infty)$
→ F-ja opada za $x \in (-\infty, \alpha)$

4) $a < 0, D > 0$



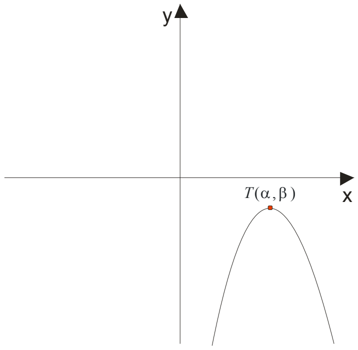
$\rightarrow$ F-ja je definisana $\forall x \in R$
$\rightarrow$ F-ja seče x- osu u x_1, x_2
$\rightarrow$ $y < 0$ za $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$
$y > 0$ za $x \in (x_1, x_2)$
$\rightarrow$ F-ja ima maksimum u $T(\alpha, \beta)$
$\rightarrow$ F-ja raste za $x \in (-\infty, \alpha)$
$\rightarrow$ F-ja opada za $x \in (\alpha, \infty)$

5) $a < 0, D = 0$



$\rightarrow$ F-ja je definisana $\forall x \in R$
$\rightarrow$ F-ja seče x- osu u $x_1 = x_2$
$\rightarrow$ $y \leq 0, \forall x \in R$
$\rightarrow$ F-ja ima maximum u $T(\alpha, 0)$
$\rightarrow$ F-ja raste za $x \in (-\infty, \alpha)$
$\rightarrow$ F-ja opada za $x \in (\alpha, \infty)$

6) $a < 0, D < 0$



$\rightarrow$ F-ja je definisana $\forall x \in R$
$\rightarrow$ F-ja ne seče x- osu ($x_{1,2}$ su konjugovano -kompleksni brojevi)
$\rightarrow$ $y < 0,\ za\ \forall x \in R$
$\rightarrow$ F-ja ima maximum u $T(\alpha, \beta)$
$\rightarrow$ F-ja raste za $x \in (-\infty, \alpha)$
$\rightarrow$ F-ja opada za $x \in (\alpha, \infty)$

Postupak

1) Najpre odredimo *a,b,c* i nadjemo diskriminantu $D = b^2 - 4ac$
2) Tražimo $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ (ako ima)

   $D > 0, x_1 \neq x_2$

   $D = 0, x_1 = x_2$

   $D < 0,$ nema x_1, x_2

3) U zavisnost od znaka broja a zaključujemo da li je parabola okrenuta otvorom nagore ili na dole, tj:

   $a > 0 \rightarrow$ smeje se 

   $a < 0 \rightarrow$ mršti se 

4) Parabola uvek seče y-osu u tački (0, c)

5) Nadjemo teme $T(\alpha,\beta)$ $\alpha = -\frac{b}{2a}, \beta = -\frac{D}{4a}$

$T(\alpha,\beta)$ je max ako je $a < 0$
$T(\alpha,\beta)$ je min ako je $a > 0$

6) Konstruišemo grafik

<u>Primer 1.</u> Nacrtaj grafik funkcije

$$y = x^2 - 6x + 5$$

(ovo je ista funkcija koju smo crtali svodjenjem na kanonski oblik i pomerili duž x i y ose, pa da vidimo koji će nam postupak biti jasniji)

1)

$a = 1$ $D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = 36 - 20 = 16$
$b = -6$
$c = 5$

2)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm 4}{2}$$
$x_1 = 5$
$x_2 = 1$

3)

$a = 1 > 0 \Rightarrow$ okrenuta otvorom na gore (smeje se)

4)

y-osu seče u tački (0,5)

5)

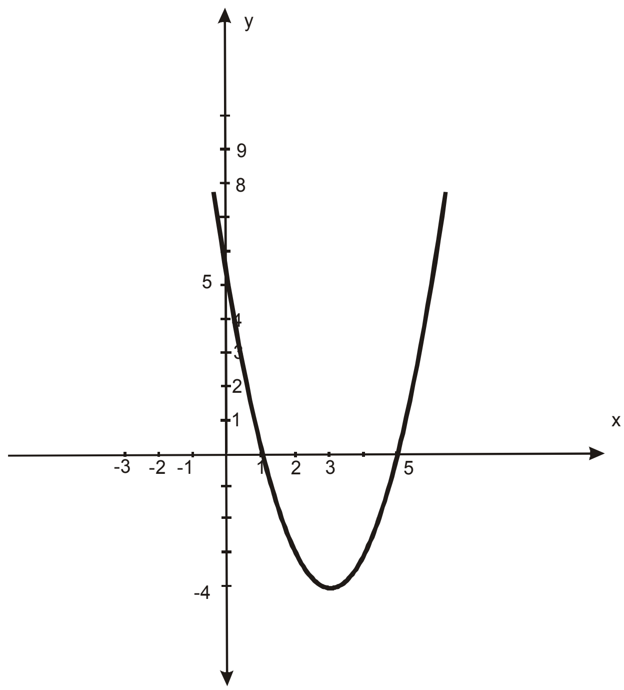
$T(\alpha,\beta)$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\cdot 1} = 3$$

$$\beta = -\frac{D}{4a} = -\frac{16}{4\cdot 1} = -4$$

$T(3,-4) \to \min$

6) Grafik:



sami odlučite koji način konstrukcije grafika vam je "lakši"

Primer 2. **Nacrtati grafik funkcije** $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+6$

1)

$$a=-\frac{1}{2}$$
$$b=\frac{1}{2}$$
$$c=6$$
$$D=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 6=\frac{1}{4}+12=12\frac{1}{4}=\frac{49}{4}$$

2)

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-\frac{1}{2}\pm\frac{7}{2}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{-\frac{1}{2}\pm\frac{7}{2}}{-1}\to x_1=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}}{-1}=\frac{3}{-1}=-3\to x_2=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}}{-1}=\frac{-4}{-1}=4$$

$$x_1=-3$$
$$x_2=4$$

3)

$a=-\frac{1}{2}<0 \Rightarrow$ okrenuta otvorom na dole (mršti se)

4)

presek sa y-osom je u tački (0,6)

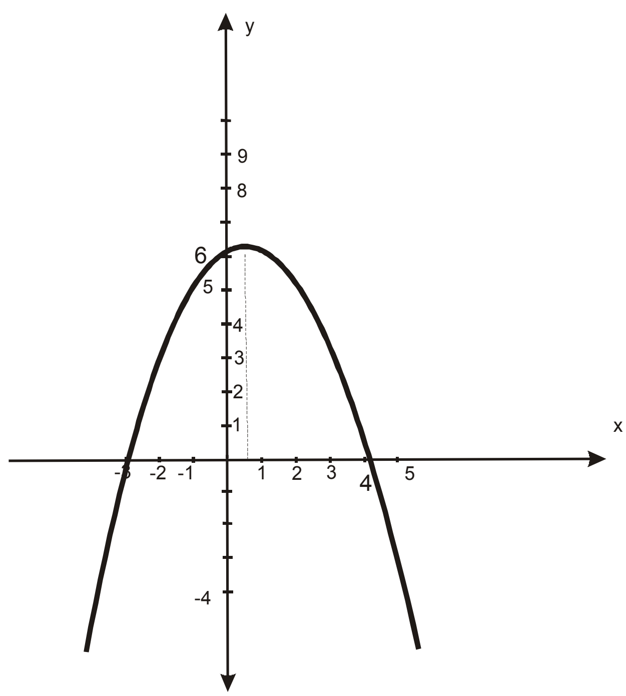
5)

$T(\alpha,\beta)$

$$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{1}{2}}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}$$

$$\beta=-\frac{D}{4a}=-\frac{\frac{49}{4}}{4\left(-\frac{1}{2}\right)}=+\frac{49}{8}=6\frac{1}{8}$$

$$T\left(\frac{1}{2},6\frac{1}{8}\right)$$



<u>Primer 3.</u> Skicirati grafik funkcije:

$$y = x^2 - 4|x| + 3$$

<u>Rešenje:</u>

Pošto $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$, odavde ćemo imati 2 grafika, jedna za $x \geq 0$ i jedan za $x < 0$.

$$y = x^2 - 4|x| + 3$$

za $\quad x \geq 0 \quad$ **je** $\quad y = x^2 - 4x + 3$

1)

$$a = 1, b = -4, c = 3$$
$$D = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4$$

2)

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$
$$x_1 = 3$$
$$x_2 = 1$$

3)

$a = 1 > 0 \Rightarrow$ smeje se

4)

presek sa y-osom je u (0,3)

5)

$$T(\alpha, \beta)$$
$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$$
$$\beta = -\frac{D}{4a} = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -1$$
$$T(2, -1)$$

za $x < 0$ **grafik** $y = x^2 - 4|x| + 3$ **je**

$y = x^2 + 4x + 3$

1)

$$a = 1, b = 4, c = 3$$
$$D = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4$$

2)

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$
$$x_1 = -1$$
$$x_2 = -3$$

3)

$a = 1 > \Rightarrow$ smeje se

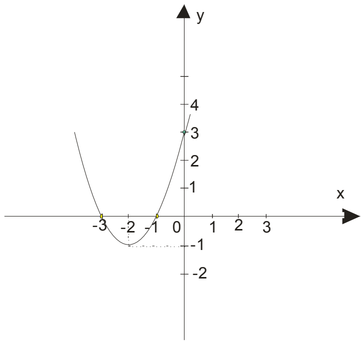
4)

presek sa –osom je u 3

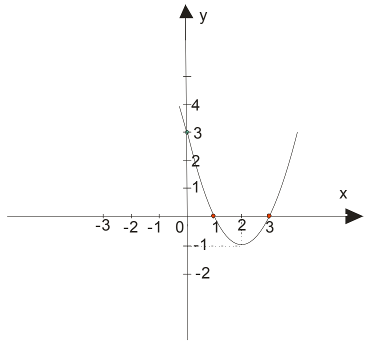
5)

$$T(\alpha, \beta)$$
$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$$
$$\beta = -\frac{D}{4a} = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -1$$
$$T(-2, -1)$$

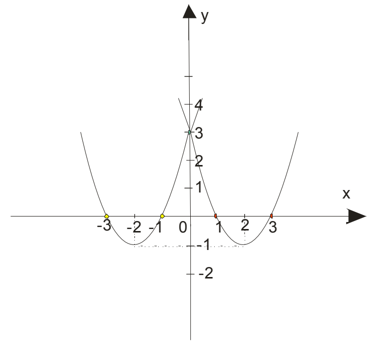
Pogledajmo sad kako izgledaju ova dva grafika posebno a kako zajedno daju grafik koji nam treba: $y = x^2 - 4|x| + 3$



$y = x^2 + 4x + 3$



$y = x^2 - 4x + 3$



$y = x^2 - 4|x| + 3$