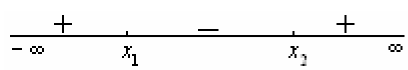
KVADRATNA NEJEDNAČINA
ZNAK KVADRATNOG TRINOMA

Kvadratne nejednačine su oblika:

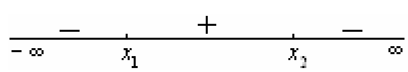
$$ax^2+bx+c>0$$
$$ax^2+bx+c\geq 0$$
$$ax^2+bx+c<0$$
$$ax^2+bx+c\leq 0$$

gde je x-realna promenljiva (nepoznata) i a,b,c su realni brojevi, $a\neq 0$.

U delu kvadratna funkcija smo analizirali kako može izgledati grafik kvadratne funkcije u zavisnosti od znaka a i D. Podsetimo se:

1) $a>0, D>0 \Rightarrow$ 

2) $a>0, D=0 \Rightarrow y\geq 0$ uvek
3) $a>0, D<0 \Rightarrow y>0$ uvek

4) $a<0, D>0 \Rightarrow$ 

5) $a<0, D=0 \Rightarrow y\leq 0$ uvek
6) $a<0, D<0 \Rightarrow y<0$ uvek

Naravno $y=ax^2+bx+c$

Primer 1. Odrediti znak trinoma:

a) $3x^2-11x-4$
b) $-5x^2-x+4$
v) $9x^2+12x+4$
g) $-x^2-6x-9$

Rešenja

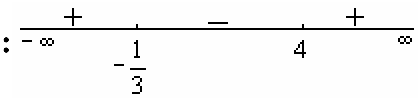
a) Najpre rešimo odgovarajuću kvadratnu jednakost: $3x^2 - 11x - 4 = 0$

$a=3$ $\quad D=b^2-4ac$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{11\pm 13}{6}$

$b=-11$ $\quad D=121+48$ $\quad x_1=4$

$c=-4$ $\quad D=169$ $\quad x_2=-\dfrac{2}{6}=-\dfrac{1}{3}$

Pošto je $a = 3 > 0$ **i** $D = 169 > 0$ **(prva situacija):**



$$3x^2 - 11x - 4 > 0 \text{ za } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (4, \infty)$$

$$3x^2 - 11x - 4 < 0 \text{ za } x \in \left(-\frac{1}{3}, 4\right)$$

b) $-5x^2 - x + 4 = 0 \rightarrow$ **PAZI:** nema množenja i deljenja nekim brojem!!!

$$a = -5 \qquad D = 1 + 80 \qquad x_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{-10}$$

$$b = -1 \qquad D = 81 \qquad x_1 = -1$$

$$c = 4 \qquad x_2 = \frac{-8}{-10} = \frac{4}{5}$$

Pošto je $a < 0, D > 0$ **(situacija 4)**

$$-5x^2 - x + 4 > 0 \text{ za } x \in \left(-1, \frac{4}{5}\right)$$

$$-5x^2 - x + 4 < 0 \text{ za } x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{4}{5}, \infty\right)$$

v) $9x^2 + 12x + 4 = 0$

$$a = 9 \qquad D = 144 - 144 \qquad x_{1,2} = \frac{-12 \pm 0}{18}$$

$$b = 12 \qquad D = 0 \qquad x_1 = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3}$$

$$c = 4 \qquad x_2 = -\frac{2}{3}$$

Pošto je $a > 0$ i $D = 0 \rightarrow 9x^2 + 12x + 4 \geq 0$ uvek a ovo vidimo i iz $(3x+2)^2 \geq 0$

g) $-x^2-6x-9$

$$a=-1 \quad b=-6 \quad c=-9$$

$$D=36-36 \quad D=0$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm 0}{-2} \quad x_1=-3 \quad x_2=-3$$

Pošto je $a<0$ **i** $D=0 \rightarrow -x^2-6x-9\le 0$ **uvek, tj za** $\forall x\in R$

Ovo vidimo i iz transformacije:

$$-x^2-6x-9=-(x^2-6x-9)=-(x+3)^2\le 0$$

Primer 2. Reši nejednačinu:

$$(x^2-4x-5)\cdot(x^2+2x-3)<0$$

Rešenje: Ovo je složeniji oblik nejednačina, gde možemo upotrebiti i već poznat šablon:

$$A\cdot B<0 \Leftrightarrow (A>0,B<0)\vee(A<0,B>0)$$

Naša preporuka je da ovakve zadatke rešavate pomoću tablice!
Najpre ćemo obe kvadratne jednačine rastaviti na činioce:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$x^2-4x-5=0 \Rightarrow \quad x_1=-1,\; x_2=5$ pa je $x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$

$x^2+2x-3=0 \Rightarrow \quad x_1=1,\; x_2=-3$ pa je $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

Sada posmatramo nejednačinu:

$$(x+1)(x-5)(x-1)(x+3)<0$$

Pravimo tablicu:

	$-\infty$				∞
x+1					
x-5					
x-1					
x+3					
(x+1)(x-5)(x-1)(x+3)					

Dakle, svaki od izraza ide u tablicu, a u zadnjoj vrsti je "ono'' što nam treba, tj. ceo izraz.
Brojevnu pravu (gornja linija od - ∞ do ∞ ćemo podeliti na 5 intervala)
Iznad ovih vertikalnih linija ćemo upisati brojeve.**Koje?**
To brojevi su rešenja kvadratnih jednačina, dakle -1,5,1 i -3 samo ih poredjamo od najmanjeg do najvećeg:-3,-1,1,5

-3 -1 1 5

	$-\infty$				∞
x+1	-				
x-5	-				
x-1	-				
x+3	-				
(x+1)(x-5)(x-1)(x+3)					

Dalje biramo <u>bilo koji</u> broj iz svakog od 5 intervala i zamenjujemo u izraze x+1, x-5, x-1 i x+3; ne zanima nas koji broj ispadne već samo njegov znak + ili – koji upisujemo u tablicu.Recimo, u intervalu (-∞,-3) izaberemo broj -10, pa ga menjamo redom:

x+1=-10-5=-9 → uzmemo – (upisan u tablicu)
x-5=-10-5= -15 → – upišemo u tablicu
x-1=-10-11=-11 → - upišemo u tablicu
x+3=-10+3=-7 → - upišemo u tablicu

Izmedju -3 i -1 izaberemo -2, itd... Dobili smo:

-3 -1 1 5

	$-\infty$				∞
x+1	-	-	+	+	+
x-5	-	-	-	-	+
x-1	-	-	-	+	+
x+3	-	+	+	+	+
(x+1)(x-5)(x-1)(x+3)	+	-	+	-	+

Onda sklopimo:

→ 4 minusa daju +
→ 3 minusa i plus daju –
→ 2 minusa i 2 plusa daju +
→ 3 plusa i 1 minus daju –
→ 4 plisa daju +

na ovaj način mi smo rešili dve nejednačine:

$(x^2-4x-5)(x^2+2x-3)<0 \to$ Biramo gde je -

$(x^2-4x-5)(x^2+2x-3)>0 \to$ Biramo gde je +

Pošto je naš zadatak da rešimo prvu, $(x^2-4x-5)(x^2+2x-3)<0$, biramo u konačnom rešenju gde su minusi:

$$x \in (-3,-1) \cup (1,5)$$

<u>Primer 3.</u> Rešiti nejednačinu:

$$\frac{x^2-3x+4}{1-x^2}>0$$

<u>Rešenje:</u>

$x^2-3x+4=0$

$$\begin{array}{ll} a=1 & D=b^2-4ac \\ b=-3 & D=9-16 \\ c=4 & D=-7 \end{array}$$

PAZI: pošto je $a>0$ i $D<0$ onda je $x^2-3x+4>0$ za $\forall x$ (za svako x)

Dakle, mora biti $1-x^2>0$

Posmatrajmo kvadratnu jednačinu:

$$\begin{array}{llll} 1-x^2=0 & a=-1 & D=0^2-4\cdot(-1)\cdot 1 & x_{1,2}=\frac{0\pm 2}{-2} \\ & b=0 & D=4 & x_1=-1 \\ & c=1 & & x_2=1 \end{array}$$

$-\infty$		-1		1		∞
	$-$		$+$		$-$	

Zaključujemo $x \in (-1,1)$

Primer 4. Za koje realne vrednosti x razlomak $\frac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1}$ manji od -1?

$\frac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1}<-1$ **PAZI:** Moramo prebaciti -1 na levu stranu i to "srediti"

$$\frac{-x^2+2x-5}{2x^2-x-1}+1<0$$
$$\frac{-x^2+2x-5+2x^2-x-1}{2x^2-x-1}<0$$
$$\frac{x^2+x-6}{2x^2-x-1}<0$$

Sad tek idemo "klasično"

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=-3 \end{array} \Rightarrow x^2+x-6=(x-2)(x+3)$$

$$2x^2-x-1=0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow 2x^2-x-1=(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Sada rešavamo: $\frac{(x-2)(x+3)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}<0$

-∞   -3 $\frac{1}{2}$ 1   2   ∞

x-2	-	-	-	-	+
x+3	-	+	+	+	+
x-1	-	-	-	+	+
x+$\frac{1}{2}$	-	-	+	+	+
$\frac{(x-2)(x+3)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}<0$	+	-	+	-	+

Rešenje: $x\in\left(-3,\frac{1}{2}\right)\cup(1,2)$

Primer 5. Data je funkcija $y=(r^2-1)x^2+2(r-1)x+2$. Odrediti realan parameter r tako da funkcija bude pozitivna za svako realno x

Rešenje:

$$(r^2-1)x^2+2(r-1)x+2>0$$

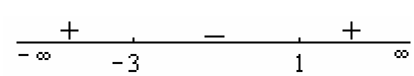
Da bi funkcija bila pozitivna mora da je:

$$a>0 \quad \text{i} \quad D<0$$

$$a=r^2-1$$
$$b=2(r-1)$$
$$c=2$$

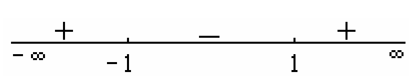
$$D=b^2-4ac$$
$$D=[2(r-1)]^2-4(r^2-1)\cdot 2$$
$$D=4(r-1)^2-8(r^2-1)$$
$$D=4(r^2-2r+1)-8r^2+8$$
$$D=4r^2-8r+4-8r^2+8$$
$$D=-4r^2-8r+12$$

$$-4r^2-8r+12<0 \,/ : (-4)$$
$$r^2+2r-3>0$$
$$r_{1,2}=\frac{-2\pm 4}{2}$$
$$r_1=1$$
$$r_2=-3$$



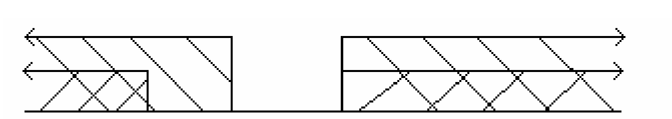
$r\in(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$

$$a>0$$
$$r^2-1>0$$
$$r^2-1=0$$
$$r_1=-1$$
$$r_2=1$$



$r\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

Upakujemo sad ova dva rešenja:



$r\in(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$ Konačno rešenje

Primer 6. Odrediti sve realne vrednosti parametra r za koje je funkcija $y = rx^2 + 2(r+2)x + 2r + 4$ negativna za svako realno x.

$$rx^2 + 2(r+2)x + 2r + 4 < 0$$

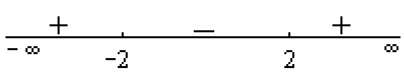
da bi funkcija bila negativna mora da važi: $a < 0$ i $D < 0$

$$a = r \qquad b = 2(r+2) \qquad c = 2r + 4$$

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = [2(r+2)]^2 - 4 \cdot r(2r+4)$$
$$D = 4(r+2)^2 - 4r(2r+4)$$
$$D = 4(r^2 + 4r + 4) - 8r^2 - 16r$$
$$D = 4r^2 + 16r + 16 - 8r - 16r$$
$$D = -4r^2 + 16$$

1. uslov

$$-4r^2 + 16 < 0 \,/ : (-4)$$
$$r^2 - 4 > 0$$
$$r_1 = 2$$
$$r_2 = -2$$

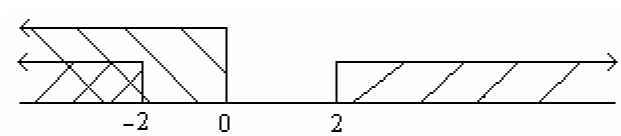


$$r \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

2. uslov

$$a < 0$$
$$r < 0$$

Upakujmo rešenja:



$r \in (-\infty, -2)$ konačno rešenje

Primer 7. Odrediti k tako da je za svako x ispunjena nejednakost

$$\left| \frac{x^2 + kx + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 2$$

$$\left| \frac{x^2 + kx + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 2 \Rightarrow -2 < \frac{x^2 + kx + 1}{x^2 + x + 1} < 2$$

Dakle, ovaj zadatak zahteva rešavanje dve nejednačine:

1) Rešavamo:

$$-2 < \frac{x^2+kx+1}{x^2+x+1}$$

$$\frac{x^2+kx+1}{x^2+x+1}+2>0$$

$$\frac{x^2+kx+1+2x^2+2x+2}{x^2+x+1}>0$$

$$\frac{3x^2+x(k+2)+3}{x^2+x+1}>0$$

$$x^2+x+1=0$$

$$\begin{array}{ll} a=1 & D=b^2-4ac \\ b=1 & D=1-4 \\ c=1 & D=-3 \end{array}$$

Kako je $a>0$ i $D<0 \Rightarrow x^2+x+1>0$ za $\forall x$ pa ne utiče na razmatranje!

$3x^2+x(k+2)+3=0$, **da bi** $3x^2+x(k+2)+3>0$ mora biti $a>0, D<0$

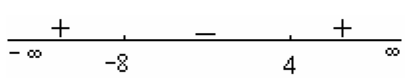
$$\begin{array}{ll} a=3 & D=(k+2)^2-4\cdot 3\cdot 3 \\ b=k+2 & D=k^2+4k+4-36 \\ c=3 & D=k^2+4k-32 \end{array}$$

$$k^2+4k-32<0$$

$$k^2+4k-32=0$$

$$k_1=4$$

$$k_2=-8$$



$$k \in (-8,4)$$

2) Rešavamo:

$$\frac{x^2+kx+1}{x^2+x+1}<2 \Rightarrow \frac{x^2+kx+1}{x^2+x+1}-2<0$$

$$\frac{x^2+kx+1-2x^2-2x-2}{x^2+x+1}<0$$

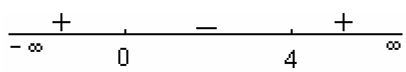
$$\frac{-x^2+(k-2)x-1}{x^2+x+1}<0$$

Kako je $x^2 + x + 1 > 0$ uvek, to mora biti:

$$-x^2 + (k-2)x - 1 > 0........../(-1)$$
$$x^2 - (k-2)x + 1 < 0$$

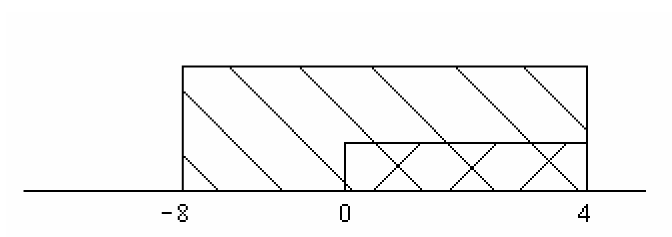
$$D < 0 \Rightarrow \quad D = [-(k-2)]^2 - 4$$
$$D = k^2 - 4k + 4 - 4$$
$$D = k^2 - 4k < 0$$

$$k^2 - 4k = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 4$$



$k \in (0,4)$

Upakujemo oba rešenja:



Dakle, konačno rešenje je: $k \in (0,4)$