IRACIONALNE JEDNAČINE

Pod iracionalnom jednačinom podrazumevaju se jednačine kod kojih se nepoznata nalazi pod korenom.
U opštem slučaju ove jednačine se ne mogu rešiti. Mi ćemo proučiti neke prostije slučajeve.

Važno: Jednačina $\sqrt{a(x)} = b(x)$ je ekvivalentna sistemu $a(x) = b^2(x) \wedge b(x) \geq 0$

Primer 1.Rešiti jednačinu: $\sqrt{x+7} = x+1$

$$\sqrt{x+7} = x+1$$
$$x+7 = (x+1)^2 \quad \wedge \quad x+1 \geq 0 \quad \wedge \quad x+7 \geq 0 \text{ ovo zbog korena}$$
$$x+7 = x^2+2x+1 \quad \wedge \quad x \geq -1 \quad \wedge \quad x \geq -7$$
$$x^2+2x+1-x-7=0$$
$$x^2+x-6=0$$

$$a=1 \qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$
$$b=1 \qquad x_1 = 2$$
$$c=-6 \qquad x_2 = -3$$

Moramo proveriti da li su rešenja "dobra'' tj. da li zadovoljavaju $x \geq -1$ i $x \geq -7$
$x_1 = 2$ **je dobro**
$x_2 = -3$ **nije** jer $x_2 = -3 \geq -1$ nije tačno. Dakle, **jedino rešenje je x = 2**

Primer 2. Rešiti jednačinu: $1+\sqrt{x^2-9} = x$

$1+\sqrt{x^2-9} = x$ Ovde najpre ostavimo koren na jednu stranu, a sve bez korena prebacimo na drugu stranu

$$\sqrt{x^2-9} = x-1$$

Sada postavljamo ekvivalenciju:

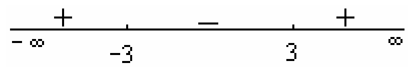
$$x^2-9=(x-1)^2 \qquad \wedge \qquad x-1\geq 0 \qquad \wedge \qquad x^2-9\geq 0$$

$$x^2-9=x^2-2x+1 \qquad\qquad x\geq 1 \qquad\qquad x_1=3$$

$$2x=1+9 \qquad\qquad\qquad\qquad x_2=-3$$

$$2x=10$$

$$x=5$$



$$x\in(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$$

Obavezno proverimo dal rešenje zadovoljava uslove: $x\geq 1$ i $x\in(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$
Pošto zadovoljava → **x=5 jeste rešenje**

<u>Primer 3:</u> Rešiti jednačinu: $\sqrt{12-x\sqrt{x^2-8}}=3$

$$\sqrt{12-x\sqrt{x^2-8}}=3/.......()^2 \rightarrow \underbrace{12-x\sqrt{x^2-8}\geq 0}_{1.uslov} \wedge \underbrace{x^2-8\geq 0}_{2.uslov}$$

$$12-x\sqrt{x^2-8}=9$$

$$-x\sqrt{x^2-8}=9-12$$

$$-x\sqrt{x^2-8}=-3 \rightarrow \sqrt{x^2-8}=\frac{3}{x} \Rightarrow \frac{3}{x}\geq 0 \Rightarrow \underbrace{x>0}_{3.uslov}$$

$$x\cdot\sqrt{x^2-8}=3........./()^2$$

$$x^2(x^2-8)=9$$

$x^4-8x^2-9=0 \rightarrow$ ovo je bikvadratna jednačina

$x^4-8x^2-9=0 \rightarrow$ smena $x^2=t$

$$t^2-8t-9=0$$

$$t_{1,2}=\frac{8\pm 10}{2}$$

$$t_1=9$$

$$t_2=-1$$

$$x^2=9 \vee x^2=-1$$

$$x_{3,4}=\pm i$$

$$x_1=3, x_2=-3$$

Kad je ovako zamršena situacija sa uslovima, kao sada, a dobili smo rešenja $x_1=3$ i $x_2=-3$, <u>**zamenite**</u> rešenja u početnu jednačinu, da vidite da li su “dobra’’!

Za $x_1 = 3$

$\sqrt{12 - x\sqrt{x^2 - 8}} = 3$

$\sqrt{12 - 3\sqrt{3^2 - 8}} = 3$

$\sqrt{12 - 3 \cdot 1} = 3$

$\sqrt{9} = 3$

$3 = 3$

Dakle x = 3 jeste rešenje

Za $x_2 = -3$

$\sqrt{12 - x\sqrt{x^2 - 8}} = 3$

$\sqrt{12 - 3\sqrt{9 - 8}} = 3$

$\sqrt{12 + 3} = 3$

$\sqrt{15} = 3$

Natačno, x = - 3 nije rešenje!

Dakle, x = 3 je jedino rešenje!

<u>Drugi tip zadataka koji ćemo proučiti je oblika</u>: $\sqrt{a(x)} \pm \sqrt{b(x)} = c(x)$

<u>Važno:</u>

Ovde moramo najpre odrediti zajedničku oblast definisanosti funkcija $\sqrt{a(x)}$ i $\sqrt{b(x)}$ odnosno $a(x) \geq 0$ i $b(x) \geq 0$, a kad dodjemo do oblika $\sqrt{P(x)} = Q(x)$ primenjujemo kao malopre ekvivalenciju da $P(x) = Q(x)^2 \wedge Q(x) \geq 0$. Opet vam savetujemo da ako se ne snalazite sa uslovima, dobijena rešenja ''proverite'' u početnu jednačinu.

<u>Primer koliko su važni uslovi:</u>

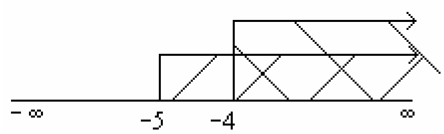
Reši jednačinu:

$\sqrt{x} + \sqrt{-x} = 1$

Ovde mora biti $x \geq 0$ i $-x \geq 0$, odnosno $x \geq 0$ i $x \leq 0$ jedino može biti x=0, a to očigledno nije rešenje!

<u>Primer 1.</u> Reši jednačinu: $\sqrt{2x+8} + \sqrt{x+5} = 7$

Pre nego počnemo sa rešavanjem:



$2x + 8 \geq 0$ i $x + 5 \geq 0$

$x \geq -4$ i $x \geq -5$

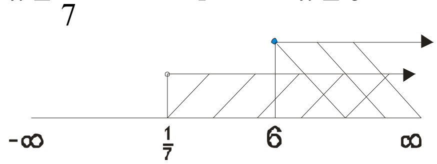
$x \in [-4, \infty)$

$$\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7\,/()^2$$
$$\sqrt{2x+8}^{\,2}+2\sqrt{2x+8}\sqrt{x+5}+\sqrt{x+5}^{\,2}=7^2$$
$$2x+8+2\sqrt{(2x+8)(x+5)}+x+5=49$$
$$2\sqrt{(2x+8)(x+5)}=49-2x-8-x-5$$
$$2\sqrt{(2x+8)(x+5)}=36-3x\,/()^2 \rightarrow \text{Pazi uslov:} \quad \begin{array}{l} 36-3x\geq 0 \\ -3\geq -36 \\ x\leq 12 \end{array}$$
$$4(2x+8)(x+5)=(36-3x)^2$$
$$4(2x^2+10x+8x+40)=1296-216x+9x^2$$
$$8x^2+40x+32x+160-1296+216x-9x^2=0$$
$$-x^2+288x-1136=0$$
$$x^2-288x+1136=0$$
$$x_{1,2}=\frac{288\pm 280}{2}$$
$$x_1=284$$
$$x_2=4$$

Da se podsetimo uslova: $x\in[-4,\infty)$ i $x\leq 12$, Dakle, **jedino rešenje je x = 4**

Primer 2. Reši jednačinu $\sqrt{7x-1}-\sqrt{3x-18}=5$ uslovi su:

$$7x-1x\geq 0 \quad \text{i} \quad 3x-18\geq 0$$
$$x\geq \frac{1}{7} \quad \text{i} \quad x\geq 6$$



$$x\in[6,\infty)\rightarrow Uslov$$

$$\sqrt{7x-1}-\sqrt{3x-18}=5$$

Lakše nam je da jedan koren prebacimo pa onda da kvadriramo!

$$\sqrt{7x-1}=5+\sqrt{3x-18}\,/\,()^2$$
$$7x-1=25+10\sqrt{3x-18}+3x-18$$
$$7x-1-25-3x+18=10\sqrt{3x-18}$$
$$4x-8=10\sqrt{3x-18}\,/:2$$
$$2x-4=5\sqrt{3x-18}\,/()^2 \rightarrow \text{ uslov :} \quad \begin{array}{l} 2x-4\geq 0 \\ x\geq 2 \end{array}$$

$$(2x-4)^2 = 25(3x-18)$$
$$4x^2 - 16x + 16 = 75x - 450$$
$$4x^2 - 16x + 16 - 75x + 450 = 0$$
$$4x^2 - 91x + 466 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{91 \pm \sqrt{825}}{8}$$
$$x_{1,2} = \frac{91 \pm 5\sqrt{33}}{8}$$
$$x_1 = \frac{91 + 5\sqrt{33}}{8}$$
$$x_2 = \frac{91 - 5\sqrt{33}}{8}$$

Kad se ovako desi moramo naći približne vrednosti za x_1 i x_2 da bi videli da li zadovoljavaju uslove:

$$x_1 \approx 14{,}97$$
$$x_2 \approx 7{,}78$$

Pošto su uslovi $x \geq 6$ i $x \geq 2$
Zaključujemo da su oba rešenja dobra.

Primer 3. Reši jednačinu: $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = \sqrt{x+24}$

Rešenje: Ovde moramo postaviti: 3 uslova:

$$\begin{matrix} x+3 \geq 0 \\ x \geq -3 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} x+8 \geq 0 \\ x \geq -8 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} x+24 \geq 0 \\ x \geq -24 \end{matrix}$$

Kad upakujemo ova 3 uslova $x \geq -3$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = \sqrt{x+24} \ /\ ()^2$$
$$\sqrt{x+3}^{\,2} + 2\sqrt{x+3}\sqrt{x+8} + \sqrt{x+8}^{\,2} = \sqrt{x+24}^{\,2}$$
$$x+3+2\sqrt{(x+3)(x+8)} + x + 8 = x + 24$$
$$2\sqrt{(x+3)(x+8)} = x + 24 - x - 3 - x - 8$$
$$2\sqrt{(x+3)(x+8)} = 13 - x \rightarrow \text{ uslov: } \begin{matrix} 13 - x \geq 0 \\ -x \geq -13 \\ x \leq 13 \end{matrix}$$

Opet kvadriramo:

$$4(x+3)(x+8)=(13-x)^2$$
$$4(x^2+8x+3x+24)=169-26x+x^2$$
$$4x^2+32x+12x+96-169+26x-x^2=0$$
$$3x^2+70x-73=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-70\pm\sqrt{5776}}{6}=\frac{-70\pm 76}{6}$$
$$x_1=1$$
$$x_2=-24$$

Da li su rešenja dobra?
Uslovi su $x\geq -3$ i $x\leq 13$, **dakle x=1 je jedino rešenje**

Primer 4. Rešiti jednačinu: $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$

Rešenje:

Ovde ćemo morati da uvedemo smenu: $\sqrt[3]{x}=t$

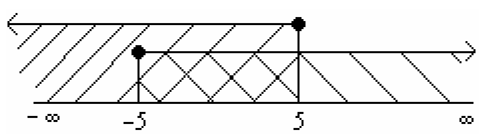
$$\sqrt{5+t}+\sqrt{5-t}=t......./()^2$$

Uslovi: $5+t\geq 0$ i $5-t\geq 0$

$t\geq -5$

$-t\geq -5$

$t\leq 5$



$$t\in[-5,5]$$

$$\sqrt{5+t}+\sqrt{5-t}=t\ /\ ()^2$$
$$\left(\sqrt{5+t}+\sqrt{5-t}\right)^2=t^2$$
$$\sqrt{5+t}^2+2\sqrt{(5+t)(5-t)}+\sqrt{5-t}^2=t^2$$
$$5+t+2\sqrt{25-t^2}+5-t=t^2$$
$$2\sqrt{25-t^2}=t^2-10/......()^2\rightarrow \text{ uslov: } t^2-10\geq 0$$

$$4(25-t^2)=(t^2-10)^2$$
$$4(25-t^2)=t^4-20t^2+100$$
$$100-4t^2=t^4-20t^2+100$$
$$t^4-16t^2=0$$
$$t^2(t^2-16)=0$$
$$t^2=0 \Rightarrow t=0$$
$$t^2-16=0 \Rightarrow t=+4, t=-4$$

za $t=4 \Rightarrow \sqrt[3]{x}=4 \Rightarrow x=64$ jeste rešenje
za $t=-4 \Rightarrow \sqrt[3]{x}-4 \Rightarrow x=-64$ nije rešenje
za $t=0 \Rightarrow x=0$ nije rešenje

Dakle $x=64$ je jedino rešenje!