VIETOVE FORMULE. RASTAVLJANJE KVADRATNOG TRINOMA NA LINEARNE ČINIOCE

Brojevi x_1 i x_2 su rešenja kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0$ ako i samo ako je

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad \text{i} \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Ove dve jednakosti zovu se Vietove formule.

Čemu one služe?

Osnovna primena je da nam pomognu da kada imamo rešenja x_1 i x_2 napravimo kvadratnu jednačinu:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$$

ili bi možda bilo preciznije

$a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2\right]=0$ ali se najčešće ovde uzima $a=1$, pa je to formula

Primer 1. Napisati kvadratnu jednačinu čija su rešenja:

a) $x_1=3, x_2=-2$
b) Jedno rešenje je $x_1=1+2i$

a) $x_1=3, \quad x_2=-2$

$$x_1+x_2=3+(-2)=+1$$
$$x_1\cdot x_2=3\cdot(-2)=-6$$

Formula je $a\left[x^2-\underbrace{(x_1+x_2)}_{1}x+\underbrace{x_1\cdot x_2}_{-6}\right]=0$

Pa je $a\left[x^2-x-6\right]=0$ a kako se najčešće uzima $\underline{a=1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x^2-x-6=0}$

b) $x_1=1+2i$

Nemamo drugo rešenje?

Pošto znamo da su rešenja kvadratne jednačine konjugovano- kompleksni brojevi to mora biti: $x_2=1-2i$

$x_1 + x_2 = 1 + 2i + 1 - 2i = 2$

$x_1 \cdot x_2 = (1 + 2i) \cdot (1 - 2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 - 4i^2 =$

(pošto je $i^2 = -1$) $= 1 + 4 = 5$

Zamenimo u formulu:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$x^2 - 2x + 5 = 0$ je tražena kvadratna jednačina

<u>Primer 2.</u> U jednačini $mx^2 - (3m + 1)x + m = 0$ odrediti vrednost realnog parametra m tako da važi: $x_1 + x_2 = 5$

<u>Rešenje</u>:

$$a = m \qquad b = -(3m + 1) \qquad c = m$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{-(3m + 1)}{m} = \frac{3m + 1}{m}$$

Kako je $x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow \dfrac{3m + 1}{m} = 5$

$$3m + 1 = 5m$$

$$3m - 5m = -1$$

$$-2m = -1$$

$$m = \frac{1}{2}$$

<u>Primer 3.</u> Odrediti vrednost realnog parametra k tako da za x_1 i x_2 jednačine:

$$x^2 - 4x + 3(k - 1) = 0 \qquad \text{važi} \qquad x_1 - 3x_2 = 0$$

<u>Rešenje:</u>

$$a = 1 \qquad b = -4 \qquad c = 3(k - 1)$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{array}\right\} \text{rešimo kao sistem}$$

$$x_1 + x_2 = 4$$

$$-x_1 + 3x_2 = 0$$

$$4x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 3$$

Kako je $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow 3 \cdot 1 = \dfrac{3(k - 1)}{1} \Rightarrow k - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{k = 2}$ je rešenje.

Primer 4. U jednačini $x^2-(m+1)x+m=0$ odrediti realan broj m tako da njena rešenja zadovoljavaju jednakost $x_1^2+x_2^2=10$

Rešenje:

$$\begin{aligned} a&=1\\ b&=-(m+1)\\ c&=m \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x_1+x_2&=-\frac{b}{a}=-\frac{-(m+1)}{1}=m+1\\ x_1+x_2&=\frac{c}{a}=\frac{m}{1}=m \end{aligned}$$

Ovaj izraz $x_1^2+x_2^2$ se često javlja u zadacima. Da ga izvedemo kao formulicu pa ćemo je gotovu upotrebljavati u drugim zadacima.

Krenimo od poznate formule za kvadrat binoma: $(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$

Odavde je: $\boxed{x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}$ **ZAPAMTI!**

Vratimo se u zadatak:

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2=10\Rightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2&=10\\ (m+1)^2-2m&=10\\ m^2+2m+1-2m&=10\\ m^2&=10-1\\ m^2&=9\\ m&=\pm\sqrt{9}\\ \boxed{m_1=3}&\vee\boxed{m_2=-3} \end{aligned}$$

Primer 5. Odrediti koeficijente p i q kvadratne jednačine $x^2+px+q=0$ tako da njena rešenja budu $\begin{aligned} x_1&=p\\ x_2&=q \end{aligned}$

Rešenje:

$$\begin{aligned} a&=1\\ b&=p\Rightarrow\\ c&=q \end{aligned} \quad \text{Iz Vietovih formula je :} \quad \begin{aligned} x_1+x_2&=-\frac{b}{a}=-\frac{p}{1}=-p\\ x_1\cdot x_2&=\frac{c}{a}=q \end{aligned}$$

Zamenimo sad još i $\begin{aligned} x_1&=p\\ x_2&=q \end{aligned}$ pa $\Rightarrow \left.\begin{aligned} p+q&=-p\\ p\cdot q&=q \end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} 2p+q&=0\\ pq-q&=0 \end{aligned}$

Iz druge jednačine sistema: $pq-q=0\Rightarrow q(p-1)=0$ pa je $\boldsymbol{q=0}$ ili $p=1$
Sad ispitujemo obe ove situacije:

Za $\boxed{q=0} \Rightarrow$ vratimo u prvu jednačinu:

$2p+q=0 \Rightarrow 2p+0=0 \Rightarrow \boxed{p=0}$

Za $\boxed{p=1} \Rightarrow 2p+q=0 \Rightarrow 2+q=0 \Rightarrow \boxed{q=-2}$

Dakle, ta kvadratna jednačina je:

$$
\begin{aligned}
x^2+px+q=0 \quad &\Rightarrow \quad x^2=0 \quad \text{za} \quad p=0 \quad \text{i} \quad q=0 \\
&\Rightarrow \quad x^2+x-2=0 \quad \text{za} \quad p=1 \;\wedge\; q=-2
\end{aligned}
$$

Rastavljanje kvadratnog trinoma na činioce

Kvadratni trinom po x je izraz oblika: ax^2+bx+c gde su $a,b,c \to$ brojevi i $a \neq 0$.
Brojevi a,b i c su koeficijenti kvadratnog trinoma.

Ako su x_1 i x_2 rešenja kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0$ onda je:

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$$

Primer1. Dati kvadratni trinom rastaviti na činioce.
:

a) x^2-5x+6

b) x^2+2x+2

Rešenje:

a) $x^2-5x+6=0$ najpre rešimo kvadratnu jednačinu:

$$
\begin{array}{lll}
a=1 & D=b^2-4ac & x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{5\pm1}{2} \\
b=-5 & D=25-24 & x_1=3 \\
c=6 & D=1 & x_2=2
\end{array}
$$

Formula: $a(x-x_1)(x-x_2)=1(x-3)(x-2)=(x-3)(x-2)$

Dakle: $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$

b) $x^2 + 2x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1, b = 2, c = 2 \qquad D = 4 - 8 = -4$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = \frac{2(-1 \pm i)}{2}$$

$x_1 = -1 + i$

$x_2 = -1 - i$

$a(x - x_1)(x - x_2) = 1(x + 1 - i)(x + 1 + i)$

Dakle: $x^2 + 2x + 2 = (x + 1 - i)(x + 1 + i)$

<u>Primer 2.</u> Skratiti razlomak: $\dfrac{3x^2 + 2x - 8}{12x^2 - 7x - 12}$

<u>Rešenje:</u> Uzećemo posebno imenilac , posebno brojilac i rastaviti ih na činioce.

$3x^2 + 2x - 8 = 0$

$a = 3 \qquad D = b^2 - 4ac \qquad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$b = 2 \qquad D = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 8 \qquad x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 10}{6}$

$c = -8 \qquad D = 4 + 96$

$D = 100$

$x_1 = \dfrac{-2 + 10}{6} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

$x_2 = \dfrac{-2 - 10}{6} = -2$

Ubacimo u formulu: $3x^2 + 2x - 8 = \boxed{a(x - x_1)(x - x_2)} = 3(x - \frac{4}{3})(x + 2)$

Isto odradimo i sa imeniocem:

$12x^2 - 7x - 12 = 0$

$a = 12 \qquad D = b^2 - 4ac \qquad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$b = -7 \qquad D = (-7)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-12) \qquad x_{1,2} = \dfrac{7 \pm 25}{24}$

$c = -12 \qquad D = 49 + 576$

$D = 625$

$x_1 = \dfrac{7 + 25}{24} = \dfrac{32}{24} = \dfrac{4}{3}$

$x_2 = \dfrac{7 - 25}{24} = -\dfrac{18}{24} = -\dfrac{3}{4}$

Dakle: $12x^2 - 7x - 12 = \boxed{a(x - x_1)(x - x_2)} = 12(x - \frac{4}{3})(x + \frac{3}{4})$

Vratimo se sad u razlomak:

$$\frac{3x^2+2x-8}{12x^2-7x-12}=\frac{\cancel{3}\cancel{(x-\frac{4}{3})}(x+2)}{\cancel{12}\cancel{(x-\frac{4}{3})}(x+\frac{3}{4})}=\frac{x+2}{4(x+\frac{3}{4})}$$

Naravno uz uslove: $\begin{array}{l} x-\frac{4}{3}\neq 0 \\ x\neq\frac{4}{3}\end{array}$ i $\begin{array}{l} x+\frac{3}{4}\neq 0 \\ x\neq -\frac{3}{4}\end{array}$

Primer 3. Skratiti razlomak: $\frac{x^3+1}{x^2-2x-3}$

Rešenje: Sličan postupak kao u prethodnom zadatku, prvo ćemo imenilac da rastavimo na činioce: $x^2-2x-3=0$

$$\begin{array}{lll} a=1 & D=b^2-4ac & x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \\ b=-2 & D=4+12 & x_{1,2}=\frac{2\pm 4}{2} \\ c=-3 & D=16 & x_1=3 \\ & & x_2=-1 \end{array}$$

Dakle: $x^2-2x-3=a(x+x_1)(x+x_2)=1(x-3)(x-(-1))=(x-3)(x+1)$
Sad brojilac:
$x^3+1\rightarrow$ ćemo rastaviti po formuli:
$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$ **VIDI POLINOMI**

pa je: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

Vratimo se u razlomak:

$$\frac{x^3+1}{x^2-2x-3}=\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{(x-3)\cancel{(x+1)}}=\frac{x^2-x+1}{x-3}$$

naravno uz uslove $\begin{array}{l} x-3\neq 0 \\ x\neq 3\end{array}$ i $\begin{array}{l} x+1\neq 0 \\ x\neq -1\end{array}$

U nekim zadacima nam traže da rešenja budu pozitivna (ili negativna). Pokažimo koji su tu **uslovi**:

1) Rešenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine sa realnim koeficijentima su:

realna **i** **pozitivna** $\Leftrightarrow$ $D \geq 0, \frac{b}{a} < 0, \frac{c}{a} > 0$

2) Rešenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine sa realnim koeficijentima su:

realna **i** **negativna** $\Leftrightarrow$ $D \geq 0, \frac{b}{a} > 0, \frac{c}{a} > 0$

Ova razmišljanja (teoreme) proizilaze iz Vietovih pravila:

→ Da bi rešenja bila realna je $D \geq 0$

→ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

1) x_1 i x_2 pozitivna $\Rightarrow$ $x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0$

$x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0$

2) x_1 i x_2 negativna $\Rightarrow$ $x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0$

$x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0$

(minus puta minus je plus)

Primer 1.

Odrediti parametar m tako da rešenja jednačine $x^2 - 3x + 2m - 1 = 0$ budu pozitivna.

Rešenje:

Iz $x^2 - 3x + 2m - 1 = 0$ vidimo da je

$$a = 1$$
$$b = -3$$
$$c = 2m - 1$$

Teorema kaže da ovde mora biti:

1. uslov: $D \geq 0$

2. uslov: $\frac{b}{a} < 0$

3.uslov: $\frac{c}{a} > 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m - 1)$

$D = 9 - 8m + 4$

$D = 13 - 8m$

1. uslov: $D \geq 0$

$D \geq 0 \Rightarrow \quad 13 - 8m \geq 0$ **<u>(Pazi: znak se okreće)</u>**

$-8m \geq -13$

$m \leq \frac{13}{8}$

2. uslov: $\frac{b}{a} < 0$

$\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{-3}{1} < 0 \Rightarrow$ Zadovoljeno!

3.uslov: $\frac{c}{a} > 0$

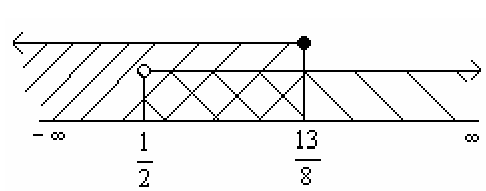
$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{2m-1}{1} < 0$

$2m - 1 < 0$

$2m < 1$

$m < \frac{1}{2}$

Sad spakujemo prvi i treći uslov, jer je drugi već zadovoljen:



Konačno rešenje je : $m \in \left(\frac{1}{2}, \frac{13}{8} \right]$