<u>KVADRATNA JEDNAČINA</u> $ax^2+bx+c=0$

Jednačina oblika $ax^2+bx+c=0$, gde je $x-$ nepoznata. a,b i c realni brojevi, $a\neq 0$, je kvadratna jednačina po x sa koeficijentima a,b i c.

Kvadratna jednačina je **<u>potpuna</u>** ako su koeficijenti $b\neq 0$ i $c\neq 0$. Ako je $b=0$ ili $c=0$ (ili oba) onda je kvadratna jednačina **<u>nepotpuna.</u>**
Nepotpuna kvadratne jednačine se rešavaju relativno lako.

<u>Nepotpune kvadratne jednačine</u>

$ax^2+bx=0$

$x(ax+b)=0$

$x=0 \quad \vee \quad ax+b=0$

$x=-\frac{b}{a}$

$ax^2+c=0$

$ax^2=-c$

$x^2=-\frac{c}{a}$

$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

$ax^2=0$

$x=0$

<u>Primeri:</u>

$2x^2+5x=0$

$x(2x+5)=0$

$x=0 \quad \vee \quad 2x+5=0$

$2x=-5$

$x=-\frac{5}{2}$

$4x^2-9=0$

$4x^2=9$

$x^2=\frac{9}{4}$

$x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}$

$x=\pm\frac{3}{2}$

$x_1=\frac{3}{2}$

$x_2=-\frac{3}{2}$

$5x^2=0$

$x^2=\frac{0}{5}$

$x=0$

$x_1=x_2=0$

<u>Potpuna kvadratna jednačina:</u>

$$ax^2+bx+c=0$$

Kvadratna jednačina ima dva rešenja: označavamo ih sa x_1 i x_2 i tradicionalno se piše

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Ovu formulicu ćemo vrlo često koristiti pa da objasnimo odakle ona....
Prvi način:
Podjimo od kvadratne jednačine:
$ax^2+bx+c=0$
Kako je $a \neq 0$, celu jednačinu ćemo pomnožiti sa *4a*
$ax^2+bx+c=0......../*4a$
$4a^2x^2+4abx+4ac=0$
Dalje ćemo obema stranama dodati izraz b^2-4ac

$$ax^2+bx+c=0......../*4a$$
$$4a^2x^2+4abx+4ac=0........../+\left(b^2-4ac\right)$$
$$4a^2x^2+4abx\cancel{+4ac}+b^2\cancel{-4ac}=b^2-4ac$$
$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$

Leva strana je sada potpun kvadrat:

$$ax^2+bx+c=0......../*4a$$
$$4a^2x^2+4abx+4ac=0........../+\left(b^2-4ac\right)$$
$$4a^2x^2+4abx\cancel{+4ac}+b^2\cancel{-4ac}=b^2-4ac$$
$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$
$$(2ax+b)^2=b^2-4ac \rightarrow \text{ Pazite sad jer } \Theta^2=\odot \rightarrow \Theta=\pm\sqrt{\odot}$$
$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$
$$2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Drugi način za dobijanje ove formule je direktna dopuna do punog kvadrata:
$$ax^2+bx+c=0......../:a$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$\underbrace{\boxed{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}}_{\text{pun kvadrat}}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\rightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\rightarrow x=-\frac{b}{2a}+\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Primer 1. **Reši jednačine:**

a) $6x^2 - x - 2 = 0$
b) $x^2 - 2x + 1 = 0$
v) $x^2 - 4x + 5 = 0$

Rešenja:
a) $6x^2 - x - 2 = 0$

a je broj ispred x^2 $\quad a = 6$
b je broj ispred x $\quad b = -1$
c je slobodan član, to jest onaj bez x $\quad c = -2$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6}$$
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12}$$
$$x_1 = \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$
$$x_2 = \frac{1-7}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$

$a = 1$
$b = -2$
$c = 1$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2}$$
$$x_1 = \frac{2}{2} = 1$$
$$x_2 = \frac{2}{2} = 1$$

v) $x^2 - 4x + 5 = 0$
$a = 1$
$b = -4$
$c = 5$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16-20}}{2 \cdot 1}$$
$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = \frac{\cancel{2}(2 \pm i)}{\cancel{2}} = 2 \pm i$$

Dakle: $x_1 = 2 + i$
$x_2 = 2 - i$

Pazi jer je: $\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = 2i$
$\sqrt{-1} = i$

Primer 2. Rešiti jednačinu:

$$(2x-3)^2+(x-1)(x+2)=2-11x$$

Rešenje:
$$(2x-3)^2+(x-1)(x+2)=2-11x$$
$$4x^2-12x+9+x^2+2x-x-2-2+11x=0$$
$$5x^2+5=0/:5$$
$x^2+1=0 \rightarrow$ Nepotpuna kvadratna jednačina
$$x^2=-1$$
$$x=\pm\sqrt{-1}$$
$$x_1=+i$$
$$x_2=-i$$

Primer 3. Rešiti jednačinu:

$\frac{x}{x-2}-\frac{3}{x+2}=\frac{8}{x^2-4} \rightarrow$ najpre rastavimo na činioce imenilac

$\frac{x}{x-2}-\frac{3}{x+2}=\frac{8}{(x-2)(x+2)} \rightarrow$ Množimo sve sa NZS $=(x-2)(x+2)$ uz uslov: $x \neq 2$, $x \neq -2$

$$x(x+2)-3(x-2)=8$$
$$x^2+2x-3x+6-8=0$$

$x^2-x-2=0 \rightarrow$ Sad radimo kao kvadratnu jednačinu

$a=1$, $b=-1$, $c=-2$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2}$$
$$x_{1,2}=\frac{1\pm3}{2}$$

$x_1=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2 \rightarrow$ **PAZI:** *nije rešenje* jer je uslov $x \neq 2$

$x_2=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \rightarrow$ Dakle $\boxed{x=-1}$

Primer 4. Grupa dečaka treba da podeli 400 klikera na jednake delove. Pre deobe 4 dečaka se odreknu svog dela, zbog čega je svaki od ostalih dobio po 5 klikera više. Koliko je u toj grupi bilo dečaka?

Rešenje:

Obeležimo sa *x*-broj dečaka, *y*- broj klikera po dečaku

Najpre iz teksta zadatka postavimo dve jednačine:

$x \cdot y = 400$

$(x-4)\cdot(y+5) = 400 \rightarrow$ "Sredimo" ovu drugu jednačinu...

$xy + 5x - 4y - 20 = 400$

$400 + 5x - 4y - 20 = 400$

$5x - 4y - 20 = 0 \rightarrow$ Iz prve jednačine izrazimo $y = \frac{400}{x}$

$5x - 4\cdot\frac{400}{x} - 20 = 0 / \cdot x$ Uz uslov da je x različito od nule.

$5x^2 - 1600 - 20x = 0 \rightarrow$ (poredjamo)

$5x^2 - 20x - 1600 = 0 \rightarrow$ (podelimo sa 5)

$x^2 - 4x - 320 = 0 \rightarrow$ sad radimo kvadratnu jednačinu

$a = 1$

$b = -4$

$c = -320$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-320)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 1280}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{1296}}{2} = \frac{4 \pm 36}{2}$$

$$x_1 = \frac{4+36}{2} = 20$$

$$x_2 = \frac{4-36}{2} = -16 \rightarrow \textit{Nemoguće}$$

Dakle bilo je 20 dečaka u grupi.

Priroda rešenja kvadratne jednačine

Diskriminanta (**D**) kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ je izraz $b^2 - 4ac$ (ono pod korenom) Dakle: $\boxed{D = b^2 - 4ac}$

Sada formulu za rešavanje možemo zapisati i kao: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Za kvadratnu jednačinu $ax^2 + bx + c$ sa realnim koeficijentima važi:

1) Jednačina ima dva različita realna rešenja ako i samo ako je $D > 0$
($x_1 = x_2 \in R$ $x_1 \neq x_2$ **akko** $D > 0$)

2) Jednačina ima jedno dvostruko realno rešenje ako i samo ako je $D = 0$
($x_1 = x_2 \in R$ **akko** $D = 0$)

3) Jednačina ima jedan par konjugovano kompleksnih rešenja akko je $D < 0$
($x_1 = a + bi, x_2 = a - bi$ **akko** $D < 0$)

Primer 1. Ispitati prirodu rešenja kvadratnih jednačina u zavisnosti od parametara:

a) $x^2 + 3x + m = 0$
b) $(n+3)x^2 - 2(n+1)x + n - 5 = 0$

a) $x^2 + 3x + m = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 3 \\ c = m \end{array}$

$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 9 - 4m$$

1) $D > 0 \quad \Rightarrow \quad 9 - 4m > 0$

$-4m > -9 \rightarrow$ **PAZI:** Okreće se smer nejednakosti

$m < \dfrac{-9}{-4}$

$m < \dfrac{9}{4}$

2) $D = 0 \quad \Rightarrow \quad 9 - 4m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{9}{4}$

3) $D < 0 \quad \Rightarrow \quad 9 - 4m < 0 \quad \Rightarrow \quad m > \dfrac{9}{4}$

Dakle: - za $m < \dfrac{9}{4}$ rešenja su realna i različita

- za $m = \dfrac{9}{4}$ rešenja su realna i jednaka
- za $m > \dfrac{9}{4}$ rešenja su konjugovano-kompleksni brojevi

b) $(n+3)x^2 - 2(n+1)x + n - 5 = 0$

$a = n + 3$
$b = -2(n+1) \quad \Rightarrow$ **PAZI:** ovde je odmah $n + 3 \neq 0$ da bi jednačina bila kvadratna
$c = n - 5$

$$D = b^2 - 4ac = \left[-2(n+1)\right]^2 - 4(n+3)(n-5)$$
$$= 4(n^2 + 2n + 1) - 4(n^2 - 5n + 3n - 15)$$
$$= \cancel{4n^2} + 8n + 4 \cancel{-4n^2} + 20n - 12n + 60$$
$$D = 16n + 64$$

1) $D > 0$ $\quad 16n + 64 > 0 \Rightarrow 16n > -64 \Rightarrow n > -4$ $\quad$ Za $n > -4$ je $x_1 \neq x_2 \in R$

2) $D = 0$ $\quad 16n + 64 = 0 \Rightarrow n = -4$ $\quad x_1 = x_2 \in R$

3) $D < 0$ $\quad 16n + 64 < 0 \Rightarrow n < -4$ $\quad x_1$ i x_2 su konjugovano-kompleksni brojevi.

Primer 2. Za koje vrednosti parametra $k \in R$ jednačina $kx^2 + (k+1)x + 2 = 0$ ima dvostruko rešenje?

Rešenje: Ovde nam treba da je $D = 0$ i naravno $a \neq 0$, jer ako je $a = 0$ jednačina nije kvadratna.

$$kx^2 + (k+1)x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = k \\ b = k+1 \quad \Rightarrow \quad k \neq 0 \\ c = 2 \end{array}$$

$$D = b^2 - 4ac = (k+1)^2 - 4 \cdot k \cdot 2 = k^2 + 2k + 1 - 8k = k^2 - 6k + 1$$
$$D = k^2 - 6k + 1 = 0$$

Sada rešavamo novu kvadratnu jednačinu “po k’’

$$k^2 - 6k + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 1 \end{array}$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2}$$

Malo sredimo : $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$

Pa je:

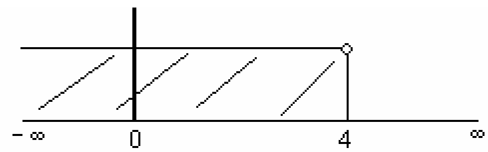
$$k_{1,2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = \frac{2\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$
$$k_1 = 3 + 2\sqrt{2}$$
$$k_2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

Ovo su rešenja za koja jednačina (početna) ima dvostruko rešenje

<u>Primer 3.</u> Za koje vrednosti parametra $m \in R$ jednačina $mx^2 - 4x + 1$ ima realna i različita rešenja?

Rešenje: Ovde dakle mora biti $D > 0$ i naravno $a \neq 0$

$$a = m \Rightarrow m \neq 0 \qquad D = b^2 - 4ac$$
$$b = -4 \quad \Rightarrow \qquad D = (-4)^2 - 4 \cdot m \cdot 1$$
$$c = 1 \qquad D = 64 - 4m > 0$$
$$16 - 4m > 0$$
$$-4m > -16$$
$$m < 4$$



nula ne sme!

Dakle, rešenje je $m \in (-\infty, 0) \cup (0, 4)$

<u>Primer 4.</u> Za koje vrednosti parametra m jednačina $x^2 - 8x + m$ ima konjugovano-kompleksno rešenja?

Rešenje: Mora biti $D < 0$ i $a \neq 0$

$$a = 1 \neq 0 \qquad D = b^2 - 4ac$$
$$b = -8 \quad \Rightarrow \quad D = (-8)^2 - 4 \cdot m \cdot 1$$
$$c = m \qquad D = 64 - 4m < 0$$
$$-4m < -64$$
$$m > 16 \Rightarrow m \in (16, \infty)$$

<u>Primer 5.</u> Za koje vrednosti parametra $k \in R$ jednačina $kx^2 + 6x + 3 = 0$ nema realna rešenja?

Rešenje: Kad nema realna rešenja, znači da su konjugovano kompleksna, odnosno $D < 0$ i naravno $a \neq 0$.

$$kx^2 + 6x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} a = k \\ b = 6 \\ c = 3 \end{array} \Rightarrow k \neq 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$
$$D = 6^2 - 4 \cdot k \cdot 3 = 36 - 12k$$
$$36 - 12k < 0$$
$$-12k < -36$$
$$k > 3 \Rightarrow k \in (3, \infty)$$

<u>Primer 6.</u> Za koje vrednosti parametra $m \in R$ jednačina $(2m+1)x^2-(2m+1)x+2{,}5=0$ ima realna i različita rešenja?

Rešenje: Ovde je $D>0$ i $a \neq 0$

$$a = 2m+1$$
$$b = -(2m+1)$$
$$c = -2{,}5$$

$$a \neq 0 \Rightarrow \quad 2m+1 \neq 0 \Rightarrow \; m \neq -\frac{1}{2}$$

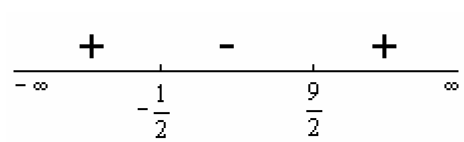
$$D = b^2-4ac$$
$$D = \left[-(2m+1)\right]^2 - 4\cdot\left[2m+1\right]\cdot 2{,}5$$
$$D = (2m+1)^2-10(2m+1)$$
$$D = 4m^2+4m+1-20m-10$$
$$D = 4m^2-16m-9>0$$

Rešimo najpre $4m^2-16m-9=0$

$$a = 4$$
$$b = -16$$
$$c = -9$$

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$m_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256+144}}{8} = \frac{16 \pm 20}{8}$$
$$m_1 = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$
$$m_2 = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

(Pogledaj kvadratne nejednačine):



$D>0 \rightarrow$ biramo gde je +　　　　$m \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2},\infty\right)$