PRIMENA SLIČNOSTI NA KRUG
(ZLATNI PRESEK)

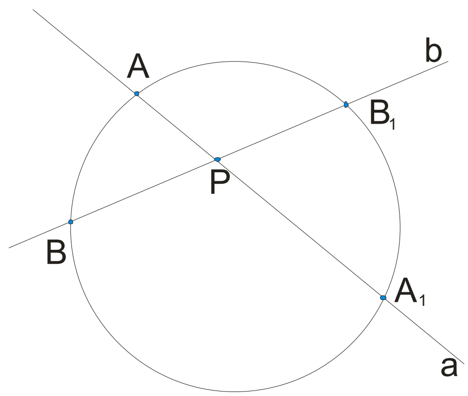
Posmatrajmo krug K i tačku P u ravni tog kruga. Neka su prave a i b dve sečice datog kruga K koje prolaze kroz P.

Očigledno je da imamo tri situacije:

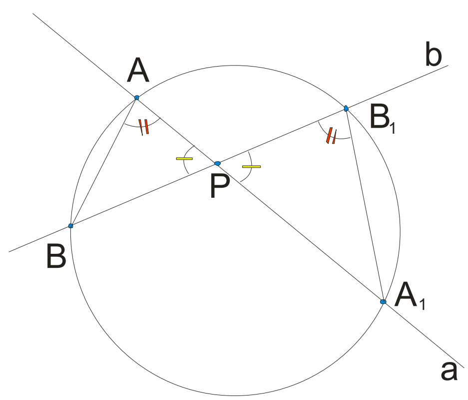
- i) tačka P je u krugu
- ii) tačka P je na krugu
- iii) tačka P je van kruga

Razmotrimo jednu po jednu situaciju...

i) tačka *P* je u krugu



Označimo sa A i A_1 presečne tačke prave a sa kružnom linijom k kruga K, a sa B i B_1 presečne tačke prave b sa kružnom linijom k. Uočimo trouglove ABP i A_1B_1P.



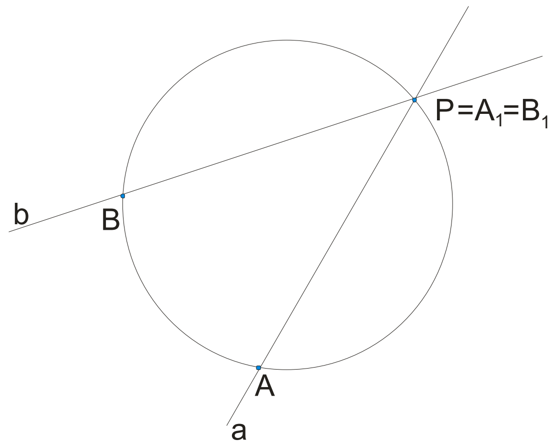
Uočeni trouglovi su **slični** jer imaju po dva ista ugla: $\sphericalangle APB = \sphericalangle A_1PB_1$ jer su unakrsni (žuti uglovi na slici) a

$\sphericalangle PAB = \sphericalangle PB_1A_1$ su periferijski uglovi nad istim lukom (crveni uglovi na slici).

Iz sličnosti ovih trouglova sledi proporcionalnost odgovarajućih stranica:

$$AP : BP = B_1P : A_1P \rightarrow \boxed{AP \cdot A_1P = BP \cdot B_1P}$$

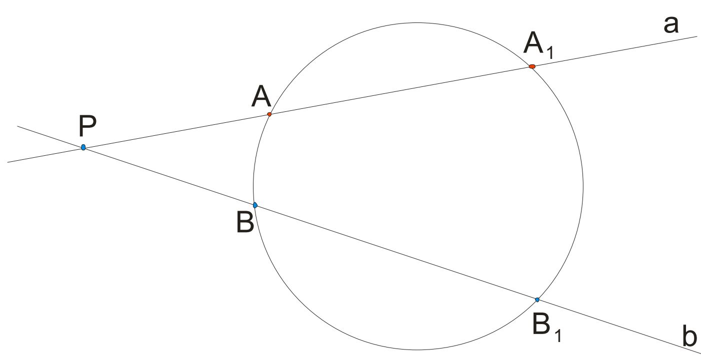
ii) tačka *P* je na krugu



Ovde se tačke P , A_1 i B_1 poklapaju. Očigledno je $AP \cdot A_1P = BP \cdot B_1P = 0$ jer je $A_1P = B_1P = 0$. Dakle opet je

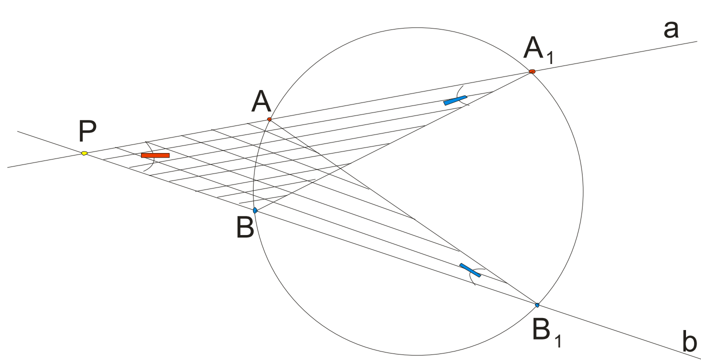
$$\boxed{AP \cdot A_1P = BP \cdot B_1P}.$$

iii) tačka *P* je van kruga



Uvedimo ista obežezavanja kao i u prvoj situaciji : A i A_1 su presečne tačke prave a sa kružnom linijom k kruga K,

a B i B_1 presečne tačke prave b sa kružnom linijom k . Uočimo trouglove PAB_1 i PBA_1 .



Jasno je da ova dva trougla imaju zajednički ugao kod temena P (crveni na slici) a uglovi obeleženi plavom bojom su jednaki kao periferijski uglovi nad istim lukom AB.

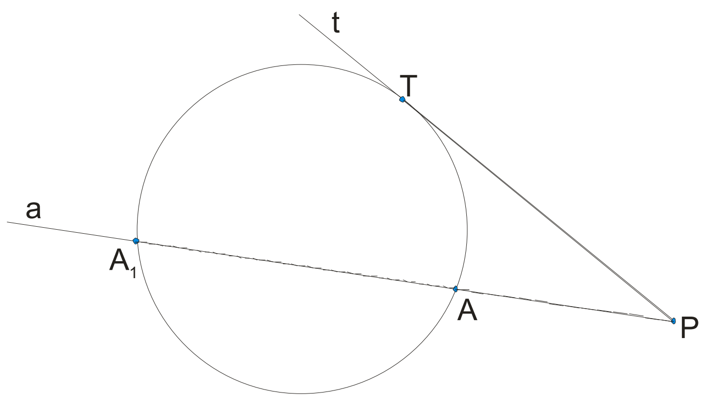
Dakle, ova dva trougla su slična! Odgovarajuće stranice su proporcionalne:

$AP : BP = B_1P : A_1P \rightarrow \boxed{AP \cdot A_1P = BP \cdot B_1P}$. I treći put smo izvukli isti zaključak:

Ako je K dati krug i P data tačka u ravni tog kruga, tada proizvod odsečaka koje krug K odredjuje na bilo kojoj sečici povučenoj iz tačke P , ima konstantnu vrednost.

Najčešće se uvodi oznaka $p^2 = PA \cdot PA_1$ a ovaj konstantan proizvod nazivamo **potencijom tačke P** u odnosu na krug K.

Ako se tačka P nalazi van kruga , zanimljivo je posmatrati situaciju kad iz tačke P postavimo tangentu na krug i sečicu kruga:



Ovde bi važilo: $PT \cdot PT = PA \cdot PA_1 \rightarrow \boxed{PT^2 = PA \cdot PA_1}$, odnosno rečima bi rekli:

Potencija tačke P u odnosu na krug K jednaka je kvadratu odgovarajuće tangentne duži!

Najzanimljivija stvar vezana za ovo je takozvani **zlatni presek.**

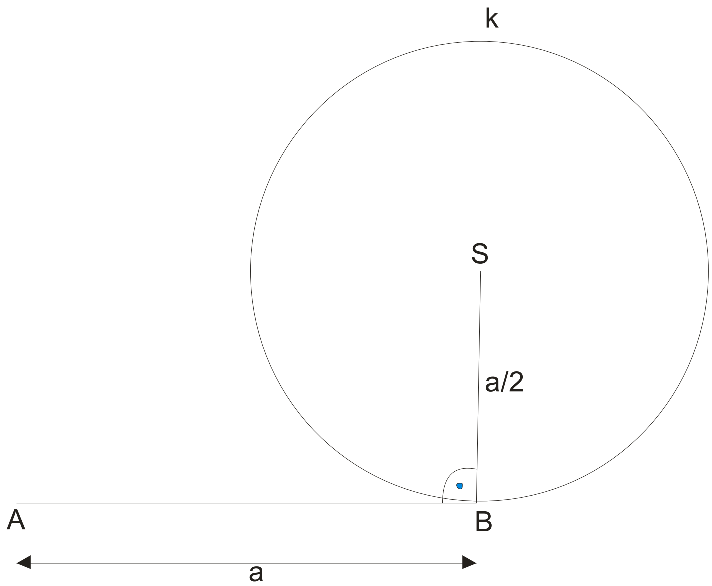
Ako je neka duž AB podeljena tačkom C tako da je veći odsečak geometrijska sredina duži AB i manjeg odsečka, to jest ako važi : $AC = \sqrt{AB \cdot BC} \rightarrow \boxed{AC : AB = BC : AC}$ **tada kažemo da smo izvršili zlatni presek duži AB.**

Naravno, sada ćemo vam objasniti kako da nadjete konstrukcijski tačku C koja deli duž AB po zlatnom preseku.

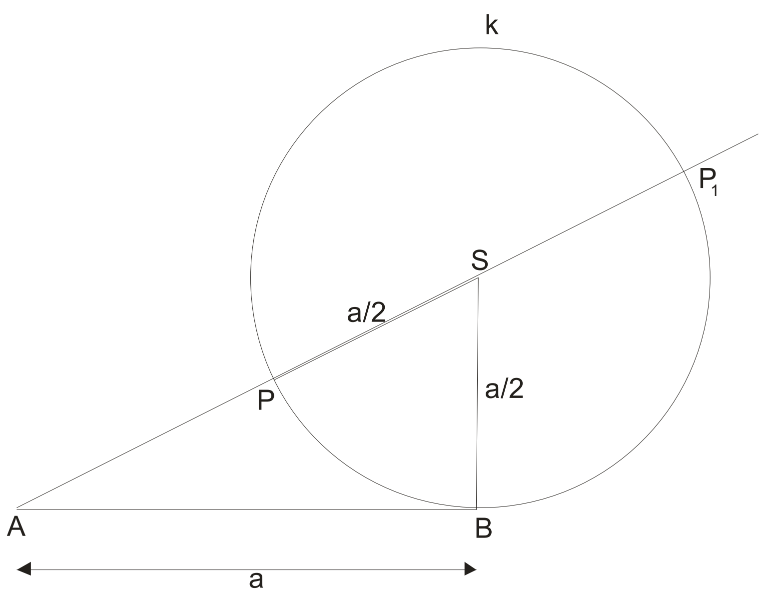
Predpostavljate da ima neke veze sa prethodnim izlaganjem, odnosno sa činjenicom da je **potencija tačke P u odnosu na krug K jednaka kvadratu odgovarajuće tangentne duži!**

Uzmemo proizvoljnu duž AB i obeležimo recimo da je $AB = \mathrm{a}$. U tački B podignemo normalu i na njoj nanesemo

dužinu $\frac{\mathrm{a}}{2}$, obeležimo tu tačku sa S. Konstruišemo krug poluprečnika $\frac{\mathrm{a}}{2}$ sa centrom u S.

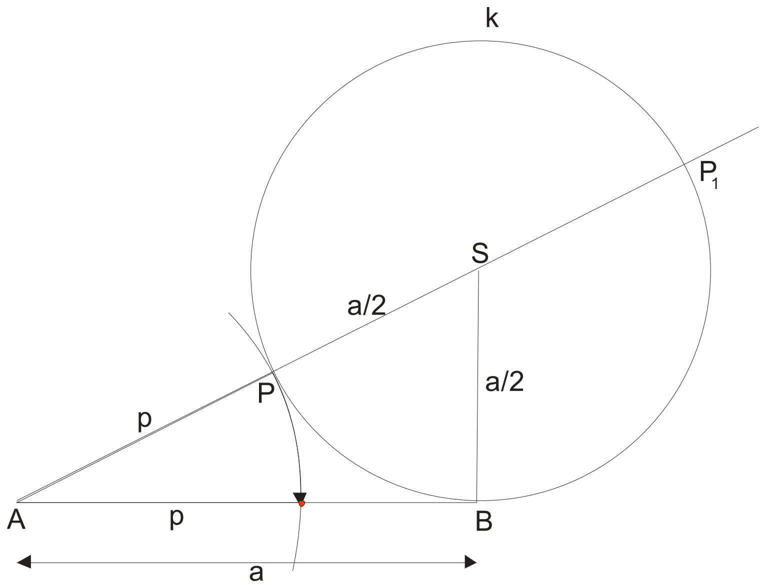


Dalje spojimo SA i dobijemo sečicu kruga . Obeležimo te tačke preseka sa P i P_1.

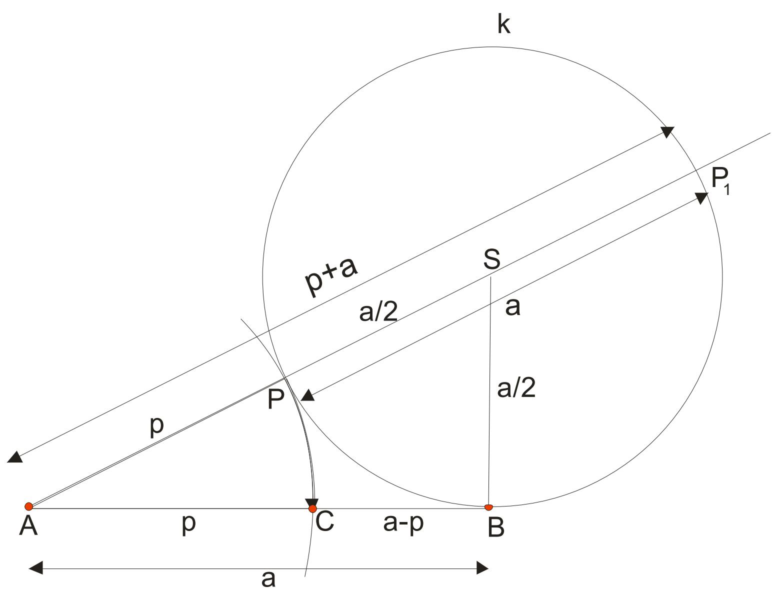


Uočimo rastojanje izmedju tačaka A i P. Obeležimo recimo da je $\mathrm{AP} = \mathrm{p}$. Ubodemo šestar u tačku A , uzmemo

rastojanje do tačke P i to rastojanje spustimo dole na duž AB.



Obeležimo ovu tačku sa C. **To je tačka koja deli duž u zlatnom preseku!**



Dokaz je jednostavan: (posmatrajte sliku)

Na osnovu osobina potencije imamo: $AB^2 = AP \cdot A_1P$, odnosno $\mathrm{a}^2 = (p+\mathrm{a}) \cdot p$

Odavde je:

$$\mathrm{a}^2 = (p+\mathrm{a}) \cdot p$$
$$\mathrm{a}^2 = p^2 + \mathrm{a} \cdot p$$
$$p^2 = \mathrm{a}^2 - \mathrm{a} \cdot p$$
$$p^2 = \mathrm{a}(\mathrm{a}-p) \rightarrow \boxed{p : \mathrm{a} = (\mathrm{a}-p) : p}$$

Zlatni presek…

U drugom razredu srednje škole ćete naučiti da rešavate kvadratnu jednačinu, pa će vam sledeća računica izgledati jasnije, za sad zapamtite rezultat ove računice:

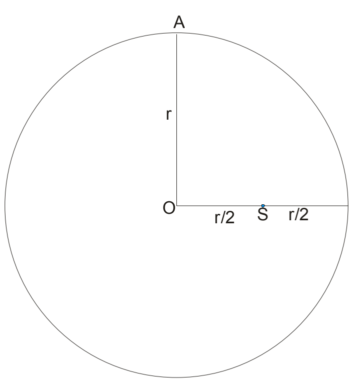
$$a^2 = (p + a) \cdot p$$
$$a^2 = p^2 + ap$$
$$a^2 - ap - p^2 = 0 \rightarrow \text{kvadratna jednačina po a, } \; a = 1, b = -p, c = -p^2$$
$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$a_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4p^2}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{5p^2}}{2} = \frac{p \pm p\sqrt{5}}{2} = p\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$$
$$a_1 = p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \wedge a_2 = p\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$a_1 \approx 1,618033989 \cdot p, \quad \text{jer je } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989$$
$$a_2 \approx -0,618033988 \cdot p, \; \text{jer je } \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618033988$$

Nas interesuje da je : $a \approx 1,618033989 \cdot p$, **odnosno:** $\boxed{a : p \approx 1,618033989}$

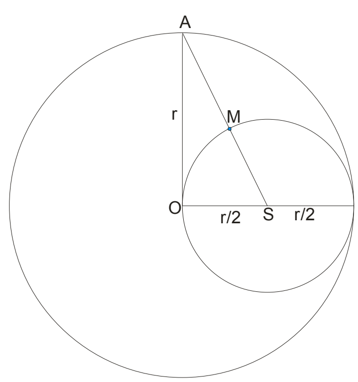
ZAPAMTITE OVAJ BROJ! $1,618033989$

Najčešći zadatak koji daju profesori a vezan za zlatni presek je konstrukcija pravilnog desetougla ili petougla upisanog u krug zadatog poluprečnika.

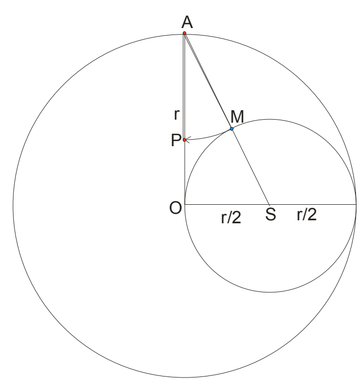
Evo kako se konstruiše **desetougao**:



slika 1.



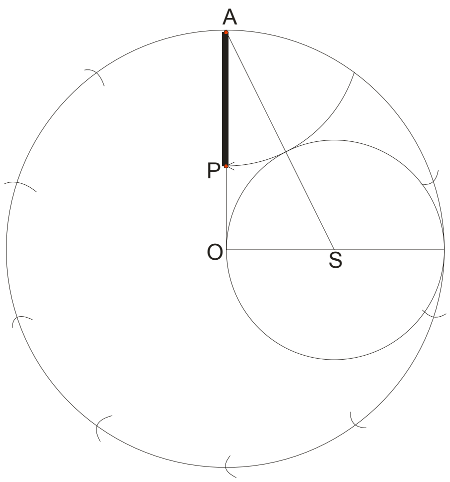
slika 2.



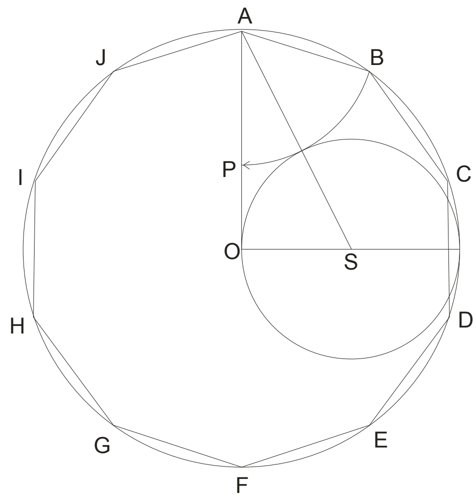
slika 3.

Nacrtamo krug zadatog poluprečnika r. Nadjemo sredinu poluprečnika ,to je tačka S na slici 1.
Iz tačke S kao centra konstruišemo krug poluprečnika $\frac{r}{2}$ i spojimo tačke A i S. Dobijamo tačku M (slika 2.)
Ubodemo šestar u A i prenesemo rastojanje AM na poluprečnik AO. Dobili smo tačku P.(slika 3.)
Sećate se, ovo je postupak traženja zlatnog preseka...

Dobijena duž AP je ustvari dužina stranice desetougla!



slika 4.

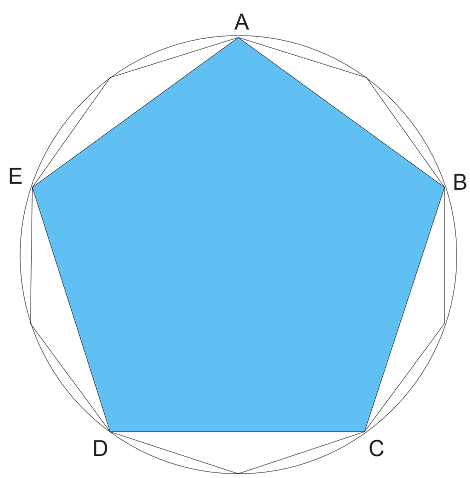


slika 5.

U otvor šestara uzmemo rastojanje AP i prenosimo ga po kružnoj liniji počevši od tačke A. (slika 4.)

Spojimo te tačke i eto traženog desetougla upisanog u krug zadatog poluprečnika. (slika 5.)

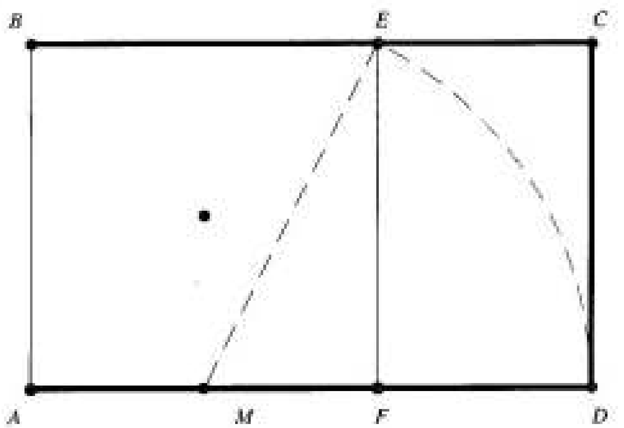
Ako profesor od vas traži da nacrtate **pravilan petougao** upisan u krug zadatog poluprečnika, **vi nacrtate najpre desetougao pa spojite svako drugo teme!**



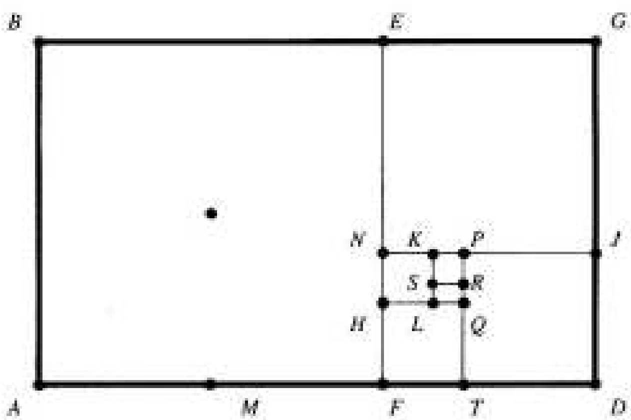
E sad da se vratimo na **zlatni presek** i da vam ispričamo **nekoliko zanimljivosti**…

Zlatni pravougaonik je pravougaonik čije se stranice nalaze u odnosu zlatnog preseka. $\boxed{a : b \approx 1,618033989}$

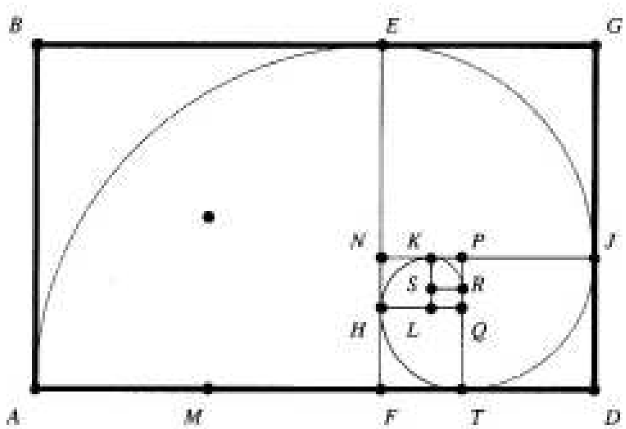
Da bi konstruisali zlatni pravougaonik podjemo od kvadrata AFEB. M je sredina stranice AF. Ubodemo šestar u tačku M i spustimo rastojanje do preseka sa produžetkom AF. Dobijamo tačku D. Sad nije teško naći i četvrto teme C.



Ako nastavimo sa konstrukcijom zlatnih pravougaonika, dobijamo:



Uvek kad odstranimo kvadrat, ostaje zlatni pravougaonik. Uradimo sada sledeće: ubodemo šestar u F i opišemo četvrtinu kruga poluprečnika FA (dužina stranice kvadrata), zatim ubodemo šestar u N i opišemo četvrtinu kruga poluprečnika NE , ubodemo šestar u P i opišemo četvrtinu kruga poluprečnika PJ...i tako dalje.



Dobili smo takozvanu **zlatnu spiralu**.

Antički arhitekti su smatrali da gradjevine imaju izuzetan izgled ako su im dimenzije odredjene zlatnim presekom.

Čak se verovalo da gradjevine sa zlatnim presekom imaju magične moći.

Poznati Partenon u Atini je gradjen po zlatnom preseku.

Egipatske piramide imaju proporcije zlatnog preseka, zgrada ujedinjenih nacija...

Zlatni presek se nalazi i u delima čuvenih muzičara: dela Baha, Mocartove sonate, Betovenova peta sinfonija, muzika Šuberta…Nalazi se na slikama Leonarda …

Ipak, najzanimljivije je to da zlatni presek nalazimo i u prirodi:

Ukoliko podelimo broj ženki pčela i mužjaka u košnici, dobijamo približno 1,6.

Izmerimo čovečju dužinu od vrha glave do pupka, pa to podelimo sa dužinom od pupka do poda…opet 1,6.

Seme suncokreta raste u suprotnim spiralama a medjusobni odnosi prečnika rotacije su 1,6.

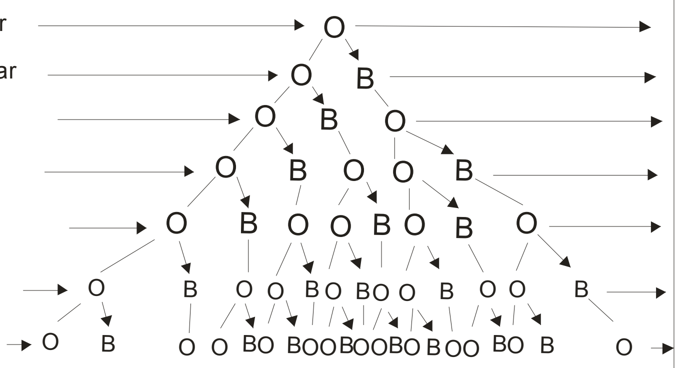
Na kućici (školjci) mekušca nautilusa takodje je odnos spiralnog prečnika prema svakom sledećem 1,6.

Kada se govori o zlatnom preseku , neizbežno se mora pomenuti i ***Fibonačijev niz.***

Medjutim, kako se nizovi uče tek u trećoj godini, mi ćemo pokušati da vam na jednom primeru objasnimo kakav je to Fibonačijev niz.

Dobijemo na početku godine jedan par zečeva, koji svakog meseca izvede novi par a on postaje produktivan, to jest izvodi novi par za mesec dana, kad odraste. Koliko ćemo parova zečeva imati za godinu dana?

Mi smo vam nacrtali jedan dijagram da bi pojasnili stvari:



mesec	parovi	broj parova odraslih zečeva (O)	broj parova beba zečeva (B)	UKUPAN BROJ PAROVA ZEČEVA
1. januar		1	0	1
1. februar		1	1	2
1. mart		2	1	3
1. April		3	2	5
1. maj		5	3	8
1. jun		8	5	13
1. jul		13	8	21
1. avgust		21	13	34
1. septembar		34	21	55
1. oktobar	I T D.	55	34	89
1. novembar		89	55	144
1. decembar		144	89	233
1. januar naredne godine		233	144	377

Parovi beba zečeva su obeleženi sa B, a kad porastu (mogu da daju novi par) sa O.

Pogledajte kolonu sa brojem parova odraslih zečeva. U njoj su brojevi 1,1,2,3,5,8,13,21,...

broj parova odraslih zečeva (O)
1
1
2
3
5
8
13
21
34
55
89
144
233

To je Fibonačijev niz. Naravno on se nastavlja dalje...

Vi se sada pitate zašto je ovaj niz tako specijalan?

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89...

Počevši od trećeg člana, svaki sledeći član niza dobijamo tako što saberemo prethodna dva člana...

2=1+1
3=2+1
5=3+2
8=5+3
itd.

Pa i nije nešto baš mnogo specijalno, kažete vi sada...Ali... Prava stvar tek dolazi na videlo!

Ako podelimo dva uzastopna člana niza počevši od 3 i 5 dobijamo:

$$\frac{5}{3} \approx 1,67$$
$$\frac{8}{5} = 1,6$$
$$\frac{13}{8} = 1,625$$
$$\frac{21}{13} \approx 1,615$$
$$\frac{34}{21} \approx 1,619$$
$$\frac{55}{34} \approx 1,617$$
$$\frac{89}{55} \approx 1,618$$
$itd.$

Da li vam je poznat ovaj broj? $1,618033989$ **je zlatni presek, a ovde je približno svuda baš on!**

Zato je ovaj niz specijalan.