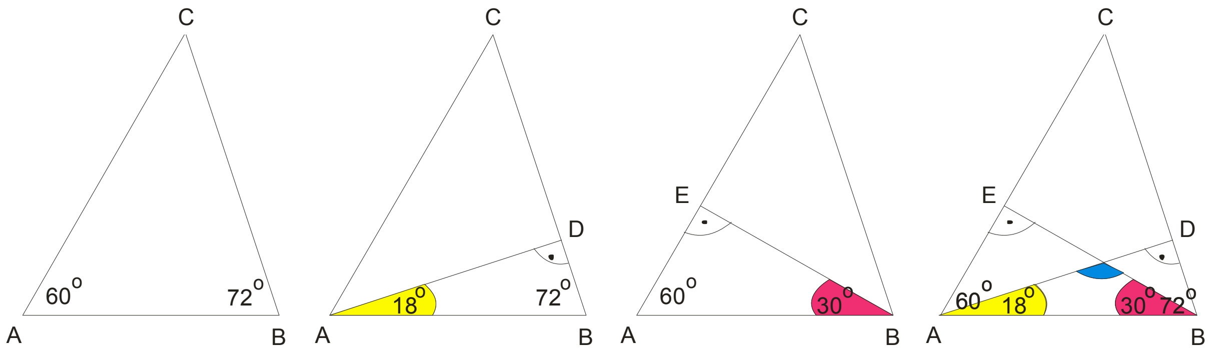
O TROUGLU (zadaci)

Primer 1.

Dva ugla trougla iznose 60^0 i 72^0. Odrediti uglove koje obrazuju visine trougla koje polaze iz temena datih uglova.

Rešenje:

Kod većine zadataka vezanih za trougao je neophodno nacrtati sliku i postaviti problem. Naravno, prvo pročitajte fajl O TROUGLU (teorijske napomene) da bi lakše postavili problem.



slika 1. slika 2. slika 3. slika 4.

Nacrtamo trougao sa datim uglovima (slika 1.)

Spustimo visinu AD na stranicu BC (slika 2.) . Trougao ABD je pravougli pa je $\measuredangle BAD = 18^0$.

Spustimo visinu BE na stranicu AC (slika 3.) . Trougao ABE je pravougli pa je $\measuredangle ABE = 30^0$.

Sad posmatrajmo ceo problem (slika 4.) . Plavi ugao (koji se traži u zadatku) ćemo izračunati kad od 180^0 oduzmemo zbir ova dva ugla od 18^0 i 30^0. Traženi ugao je (obeležimo ga recimo sa $\measuredangle x$):

$$\measuredangle x = 180^0 - (18^0 + 30^0)$$
$$\measuredangle x = 180^0 - 48^0$$
$$\boxed{\measuredangle x = 132^0}$$

Naravno , ako profesor ne traži ovaj tup ugao , već oštar ugao preseka (recimo $\measuredangle y$) , imamo:

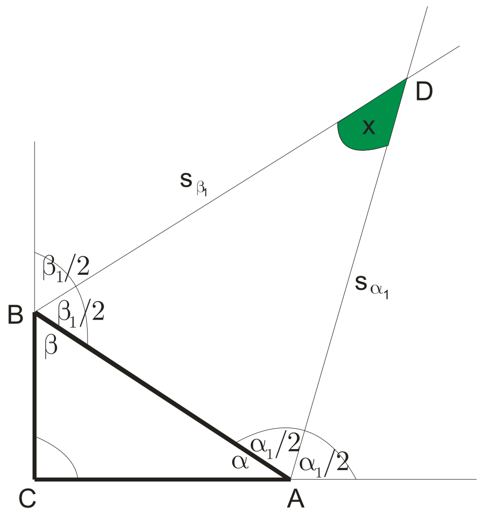
$$\measuredangle x + \measuredangle y = 180^0$$
$$\measuredangle y = 180^0 - 132^0$$
$$\boxed{\measuredangle y = 48^0}$$

Primer 2.

Odrediti ugao pod kojim se seku simetrale spoljašnjih uglova na hipotenuzi pravouglog trougla.

Rešenje:

Mora slika:



Obeležimo traženi ugao sa $\measuredangle x$.

Iz trougla ABD zaključujemo da je

$$\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\beta_1}{2}+\measuredangle x=180^0$$
$$\measuredangle x=180^0-\left(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\beta_1}{2}\right)$$
$$\measuredangle x=180^0-\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right)$$

Kako se radi o pravouglom trouglu, imamo da je:

$$\alpha_1+\beta_1=360^0-90^0$$
$$\alpha_1+\beta_1=270^0$$

Vratimo se da nadjemo traženi ugao:

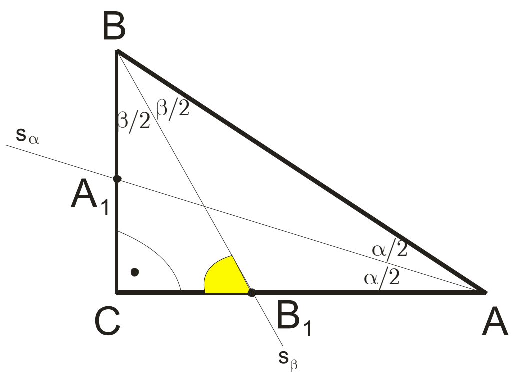
$$\measuredangle x=180^0-\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right)$$
$$\measuredangle x=180^0-\left(\frac{270^0}{2}\right)$$
$$\measuredangle x=180^0-135^0$$
$$\boxed{\measuredangle x=45^0}$$

Naravno, ako profesor traži tup ugao preseka $\measuredangle y=180^0-45^0=135^0$

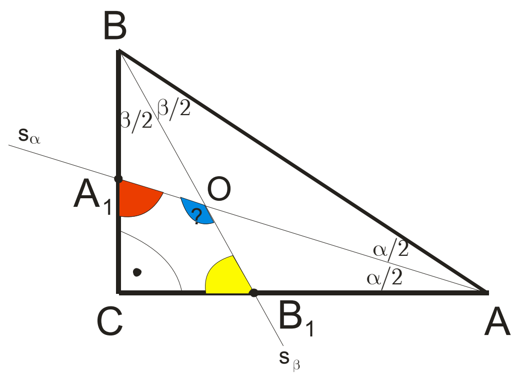
Primer 3.

Pod kojim uglom se seku simetrale oštrih uglova u pravouglom trouglu?

Rešenje:



slika 1.



slika 2.

Iz trougla BB_1C ćemo naći $\sphericalangle BB_1C$ (žuti ugao na slici 1.).

$$\sphericalangle BB_1C = 90^0 - \frac{\beta}{2}$$

Iz trougla AA_1C ćemo naći $\sphericalangle AA_1C$ (crveni trougao na slici 2.)

$$\sphericalangle AA_1C = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$$

Sad posmatramo konveksni četvorougao A_1CB_1O. Zbir uglova u četvorouglu je 360^0.

Nama treba plavi ugao na slici 2. Od 360^0 ćemo oduzeti zbir preostala tri ugla:

$$\sphericalangle A_1OB_1 = 360^0 - (90^0 - \frac{\alpha}{2} + 90^0 - \frac{\beta}{2} + 90^0)$$

$$\sphericalangle A_1OB_1 = 360^0 - (270^0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2})$$

$$\sphericalangle A_1OB_1 = 360^0 - 270^0 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

$$\sphericalangle A_1OB_1 = 90^0 + \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Znamo da je $\alpha + \beta = 90^0$ jer se radi o pravouglom trouglu, pa imamo:

$$\sphericalangle A_1OB_1 = 90^0 + \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sphericalangle A_1OB_1 = 90^0 + \frac{90^0}{2}$$

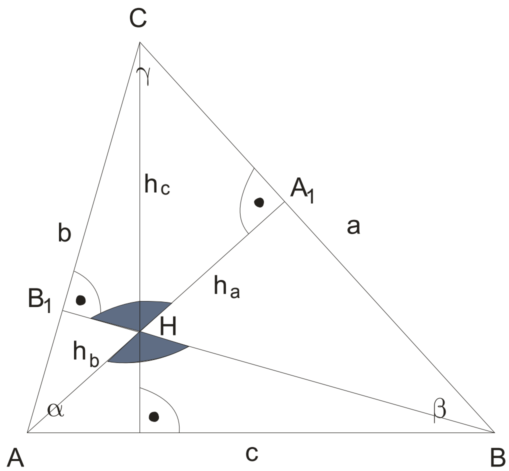
$$\sphericalangle A_1OB_1 = 90^0 + 45^0$$

$$\boxed{\sphericalangle A_1OB_1 = 135^0}$$

Primer 4.

Ako je tačka H ortocentar trougla, dokazati da je $\measuredangle AHB + \measuredangle C = 180^0$

Rešenje:



Iz trougla ABB_1 koji je pravougli, izrazimo :

$\measuredangle ABB_1 + \alpha = 90^0$

$\boxed{\measuredangle ABB_1 = 90^0 - \alpha}$

Iz trougla BAA_1 koji je takodje pravougli izrazimo :

$\measuredangle BAA_1 + \beta = 90^0$

$\boxed{\measuredangle BAA_1 = 90^0 - \beta}$

Sad posmatramo trougao ABH (ideja je da izrazimo ofarbani ugao).

$\measuredangle ABB_1 + \measuredangle BAA_1 + \measuredangle AHB = 180^0$

$90^0 - \alpha + 90^0 - \beta + \measuredangle AHB = 180^0$

$\boxed{\measuredangle AHB = \alpha + \beta}$

Znamo da je :

$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 \rightarrow \alpha + \beta = 180^0 - \gamma$

Ovo zamenimo u prethodni izraz:

$\measuredangle AHB = \alpha + \beta$

$\measuredangle AHB = 180^0 - \gamma$

$\measuredangle AHB + \gamma = 180^0$

$\boxed{\measuredangle AHB + \measuredangle C = 180^0}$

Primer 5.

Svaka stranica trougla manja je od polovine njegovog obima. Dokazati.

Rešenje:

Znamo da u svakom trouglu važi takozvana nejednakost trougla:

Svaka stranica je manja od zbira ostale dve a veća od njihove razlike.

$a < b + c$ na obe strane jednakosti dodamo a

$$a < b + c$$
$$a + a < a + b + c$$
$$2a < a + b + c$$
$$2a < O .... / : 2$$
$$\boxed{a < \frac{O}{2}}$$

Sad analogno radimo za preostale dve stranice:

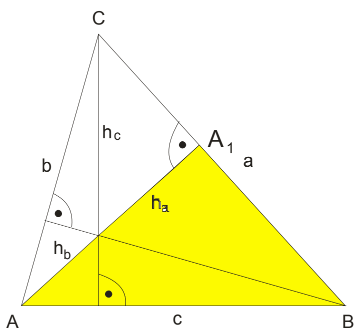
$$b < a + c$$
$$b + b < a + b + c$$
$$2b < a + b + c$$
$$2b < O .... / : 2$$
$$\boxed{b < \frac{O}{2}}$$

$$c < a + b$$
$$c + c < a + b + c$$
$$2c < a + b + c$$
$$2c < O .... / : 2$$
$$\boxed{c < \frac{O}{2}}$$

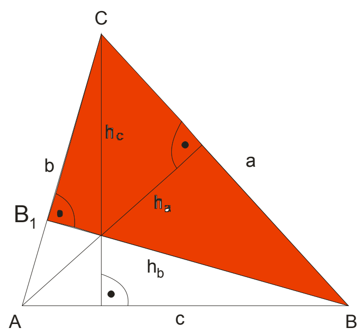
Primer 6.

Zbir visina trougla manji je od njegovog obima. Dokazati.

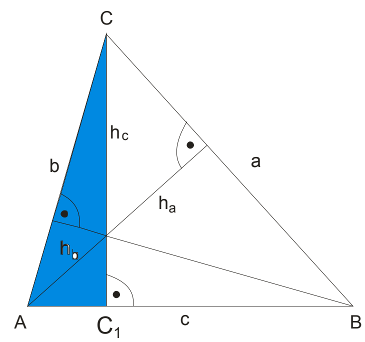
Rešenje:



slika 1.



slika 2.



slika 3.

Posmatrajmo najpre trougao BAA_1 koji je pravougli pa mu je c kao hipotenuza najduža stranica.

Izvučemo zaključak da je $h_a < c$ (slika 1.)

Posmatrajmo dalje trougao CBB_1 koji je pravougli pa mu je a kao hipotenuza najduža stranica.

Izvučemo zaključak da je $h_b < a$ (slika 2.)

Posmatrajmo na kraju trougao ACC_1 koji je pravougli pa mu je b kao hipotenuza najduža stranica.

Izvučemo zaključak da je $h_c < b$ (slika 3.)

Napišimo ove tri nejednakosti jednu ispod druge i saberemo ih.

$$\left.\begin{aligned} h_a &< c \\ h_b &< a \\ h_c &< b \end{aligned}\right\} +$$

$$h_a + h_b + h_c < a + b + c$$

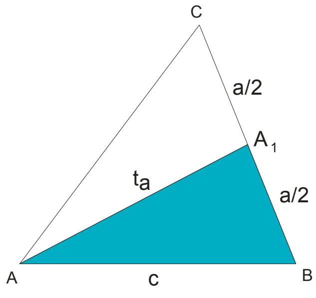
$$\boxed{h_a + h_b + h_c < O}$$

A ovo smo i trebali dokazati.

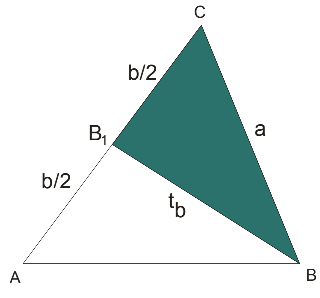
Primer 7.

Zbir težišnih duži trougla veći je od poluobima trougla. Dokazati.

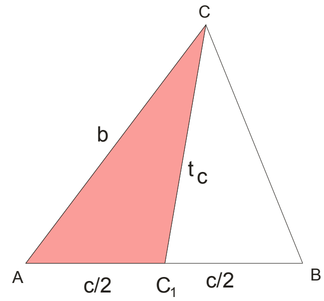
Rešenje:



slika 1.



slika 2.



slika 3.

Opet je ideja da koristimo nejednakost trougla.

Posmatrajmo plavi trougao na slici 1.

$$t_a > c - \frac{a}{2}$$

Posmatrajmo zeleni trougao na slici 2.

$$t_b > a - \frac{b}{2}$$

I na kraju posmatrajmo sliku 3.

$$t_c > b - \frac{c}{2}$$

Saberemo ove tri nejednakosti:

$$\left.\begin{array}{l} t_a > c - \dfrac{a}{2} \\ t_b > a - \dfrac{b}{2} \\ t_c > b - \dfrac{c}{2} \end{array}\right\} +$$

$$t_a + t_b + t_c > c - \frac{a}{2} + a - \frac{b}{2} + b - \frac{c}{2}$$

$$t_a + t_b + t_c > \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$$

$$\boxed{t_a + t_b + t_c > \frac{O}{2}}$$

Primer 8.

Zbir težišnih duži veći je od $\frac{3}{4}$ njegovog obima. Dokazati.

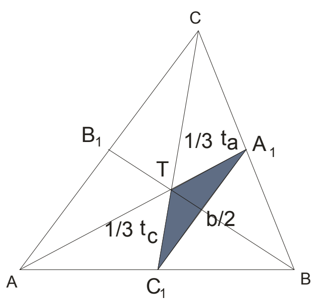
Rešenje:

Da se podsetimo nekih činjenica o trouglu:

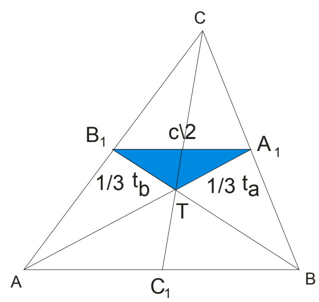
Srednja linija trougla je duž koja spaja sredine dve stranice i jednaka je polovini naspramne stranice.

Težište deli težišnu duž u odnosu 2:1.

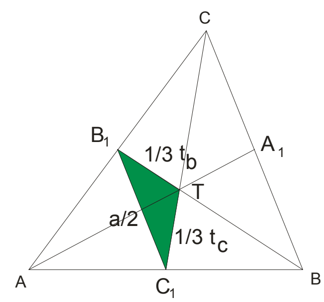
I naravno, opet koristimo nejednakost trougla!



slika 1.



slika 2.



slika 3.

Posmatrajmo trougao na slici 1.

$$\frac{1}{3}t_a+\frac{1}{3}t_c>\frac{b}{2}$$

Sa slike 2. zaključujemo da je:

$$\frac{1}{3}t_a+\frac{1}{3}t_b>\frac{c}{2}$$

I sa slike 3. imamo da je:

$$\frac{1}{3}t_b+\frac{1}{3}t_c>\frac{a}{2}$$

Saberimo ove tri nejednakosti:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3}t_a+\frac{1}{3}t_c&>\frac{b}{2}\\ \frac{1}{3}t_a+\frac{1}{3}t_b&>\frac{c}{2}\\ \frac{1}{3}t_b+\frac{1}{3}t_c&>\frac{a}{2}\end{aligned}\right\}+$$

$$\frac{2}{3}t_a+\frac{2}{3}t_b+\frac{2}{3}t_c>\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$$

$$\frac{2}{3}\left(t_a+t_b+t_c\right)>\frac{a+b+c}{2}$$

$$\frac{2}{3}\left(t_a+t_b+t_c\right)>\frac{O}{2}\text{..........................}/*\frac{3}{2}$$

$$\boxed{t_a+t_b+t_c>\frac{3}{4}O}$$