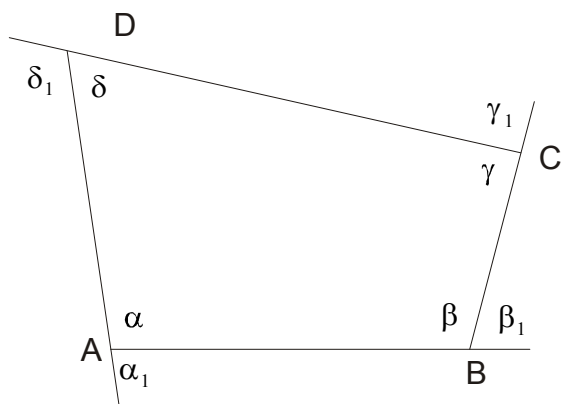


ČETVOROUGAO

Mnogougao koji ima četiri stranice naziva se četvorougao.

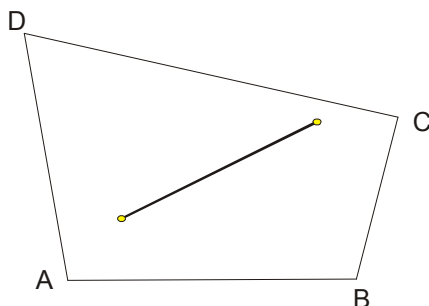


Za svaki četvorougao važi da im je zbir unutrašnjih i spoljašnjih uglova isti i iznosi 360^0

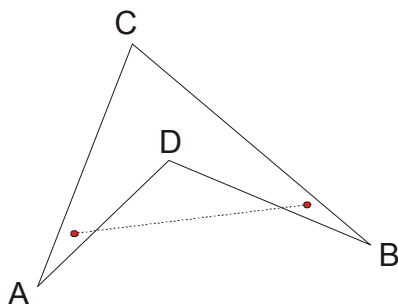
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0 \qquad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 360^0$$

Najpre da kažemo da četvorouglovi mogu biti : **konveksni** i **nekonveksni**.

Četvorougao je **konveksan** ako duž koja spaja bilo koje dve tačke unutrašnje oblasti ostaje unutar četvorougla.



Četvorougao je **nekonveksan** ako duž koja spaja bilo koje dve tačke unutrašnje oblasti izlazi iz nje.



Podela četvorouglova može se izvršiti na više načina. Prvu podelu izvršio je još Euklid.

On ih je podelio u pet grupa: kvadrati, pravougaonici, rombovi, romboidi i trapezi.

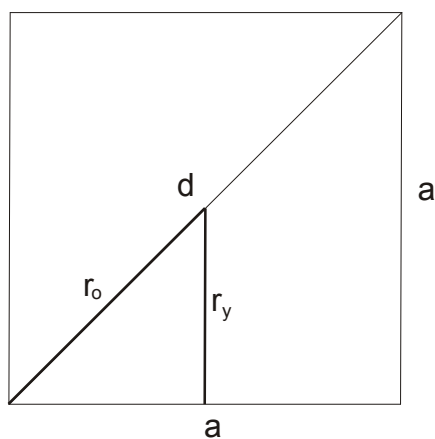
Međutim, danas je podela izvršena na sledeći način:

- 1) **Paralelogrami** (imaju po dva para paralelnih stranica)
- 2) **Trapezi** (imaju jedan par paralelnih stranica)
- 3) **Trapezoidi** (nemaju paralelne stranice)

Paralelogram je četvorougao čije su naspramne stranice paralelne.

KVADRAT

- Sva četiri ugla su mu prava
- Sve stranice su jednake
- Dijagonale su jednake i međusobno se polove pod pravim uglom
- Centralno simetrična je figura
- Ima 4 ose simetrije



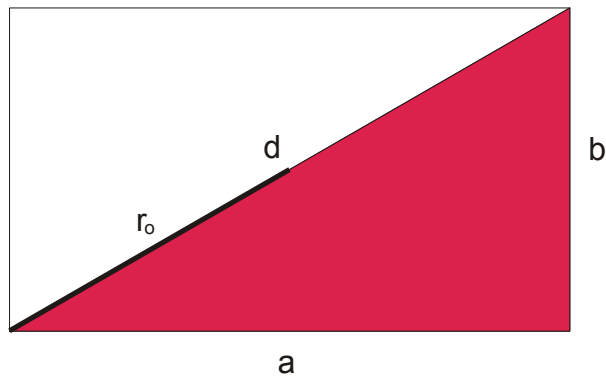
$$O = 4a$$

$$P = a^2 \quad \text{ili} \quad P = \frac{d^2}{2}, \quad r_y = \frac{a}{2} \quad \text{i} \quad r_o = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$d = a\sqrt{2} \quad \text{i} \quad \text{ako nam treba dužina stranice } a \text{ imamo dužinu dijagonale} \quad a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

PRAVOUGAONIK

- Sva četiri ugla su mu prava
- Paralelne stranice su jednake
- Dijagonale su jednake i međusobno se polove
- Centralnosimetrična figura
- Ima 2 ose simetrije



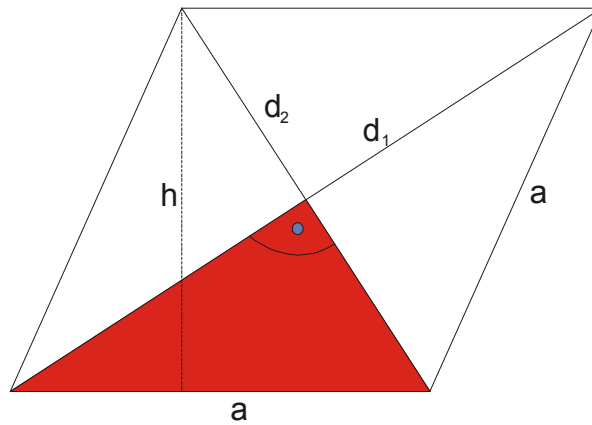
$$O = 2a + 2b$$

$$P = ab$$

$$r_o = \frac{d}{2} \quad \text{a dijagonalu nalazimo iz Pitagorine teoreme: } d^2 = a^2 + b^2$$

ROMB

- Sve četiri stranice su jednake
- Naspramni uglovi su jednaki a uzastopni su suplementni
- Dijagonale se međusobno polove pod pravim uglom
- Centralnosimetrična figura
- Ima dve ose simetrije



$$O = 4a$$

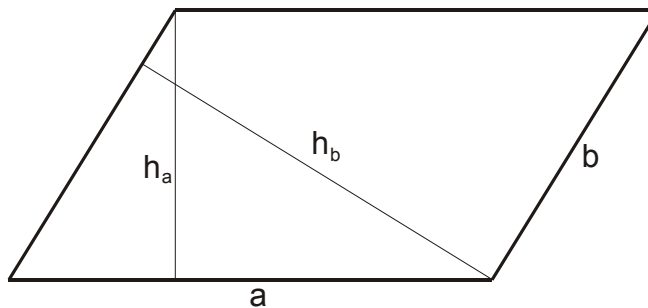
$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \quad \text{ili} \quad P = ah$$

Može se upisati kružnica čiji je poluprečnik $r_y = \frac{h}{2}$

Pitagorina teorema se primenjuje na osenčeni trougao: $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$

ROMBOID

- Paralelne stranice su jednake
- Naspramni uglovi su jednaki a uzastopni su suplementni
- Dijagonale se međusobno polove
- Centralnosimetrična figura



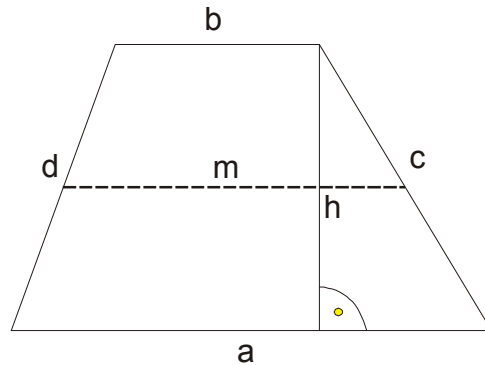
$$O = 2a + 2b$$

$$P = ah_a \quad \text{ili} \quad P = bh_b$$

Ne može da se upiše niti da se opiše kružnica .

Četvorougao čije su samo dve naspramne stranice paralelne zove se TRAPEZ.

Paralelne stranice se zovu osnovice, a druge dve kraci.

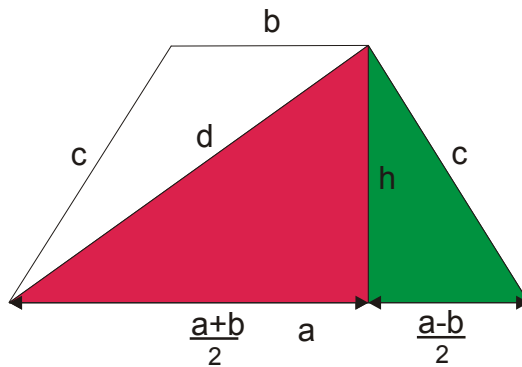


Stranice a i b su osnovice, c i d kraci. Duž koja spaja središta krakova je srednja linija

trapeza $m = \frac{a+b}{2}$. Naravno m je paralelna i sa a i sa b.

$$O = a+b+c+d; \quad P = \frac{a+b}{2} \cdot h \quad \text{ili} \quad P = mh$$

JEDNAKOKRAKI TRAPEZ



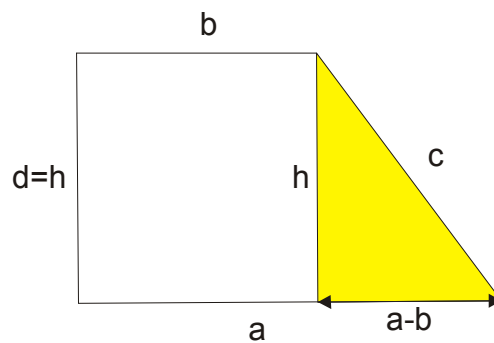
$$O = a + b + 2c$$

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h \quad \text{ili} \quad P = mh$$

Primena Pitagorine teoreme: $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 = c^2$ (na zeleni trougao)

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + h^2 = d^2 \quad (\text{ na crveni trougao})$$

PRAVOUGLI TRAPEZ



$$O = a + b + c + h$$

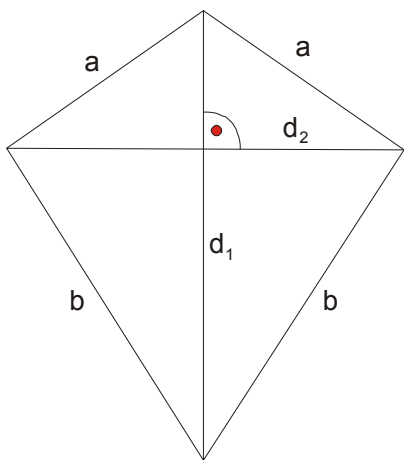
$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h \quad \text{ili} \quad P = mh$$

Primena Pitagorine teoreme: $(a-b)^2 + h^2 = c^2$

Najpoznatiji trapezoid je **deltoid**.

DELTOID

- Deltoid je trapezoid koji ima dva para jednakih uzastopnih stranica.
- Dijagonale deltoida su među sobom normalne.
- Simetrala deltoida je simetrala i njegovih uglova koje obrazuju jednake stranice
- Uglovi koje obrazuju nejednake stranice su među sobom jednaki.
- Dijagonala d_1 je simetrala ugla.



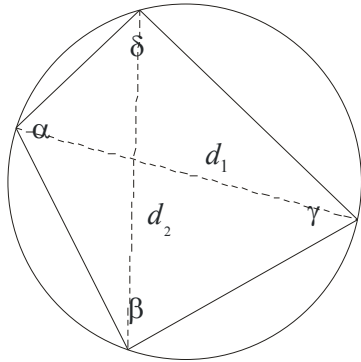
$$O = 2a + 2b$$

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Tetivni četvorougao

To je četvorougao oko koga može da se opiše kružnica.

Uslov je: $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180^\circ$



$$d_1 = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}} \rightarrow \text{Jedna dijagonala}$$

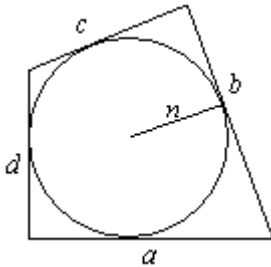
$$d_2 = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{bc + ad}} \rightarrow \text{Druga dijagonala}$$

$$P = \frac{d_1 d_2}{2} \cdot \sin \varphi \rightarrow (\varphi \text{ je ugao izmedju dijagonala})$$

Tetivni četvorougao

To je četvorougao u koji može da se upiše kružnica.

Uslov je: $a + c = b + d$



$$P = (a + c)r \text{ ili}$$

$$P = (b + d)r$$

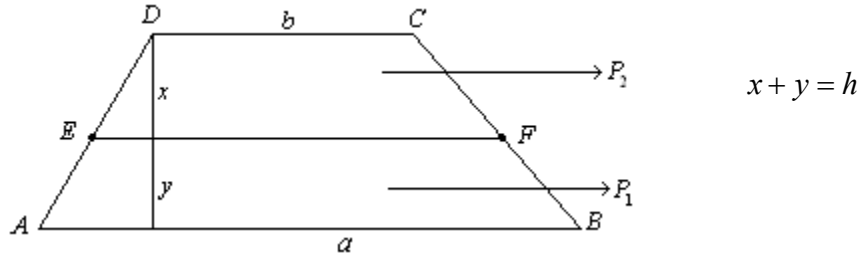
$$O = 2(a + c) \text{ ili}$$

$$O = 2(b + d)$$

ZADACI:

- 1) Trapez osnovica a i b podeljen je odsečkom EF koji je paralelan osnovicama na dva dela jednakih površina. Odrediti EF .

Rešenje:



$$P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{a + EF}{2} \cdot y = \frac{EF + b}{2} \cdot x$$

(površine su jednake)

$$y(a + EF) = x(EF + b) \Rightarrow x = \frac{y(a + EF)}{EF + b}$$

$P_1 + P_2 = P$ (zbir ove dve površine daje površinu celog trapeza)

$$\frac{a + EF}{2} \cdot y + \frac{EF + b}{2} \cdot x = \frac{a + b}{2} (x + y) \rightarrow \text{sve podelimo sa 2 i zamenimo x}$$

$$(a + EF)y + (EF + b) \frac{y(a + EF)}{EF + b} = (a + b) \left(\frac{y(a + EF)}{EF + b} + y \right) \rightarrow y \text{ je zajednički...}$$

$$(a + EF) \cancel{y} + (EF + b) \frac{\cancel{y}(a + EF)}{EF + b} = (a + b) \frac{\cancel{y} [(a + EF) + (b + EF)]}{EF + b} \rightarrow \text{sve pomnozimo sa } EF + b$$

$$(a + EF)(EF + b) + (EF + b)(a + EF) = (a + b)[(a + EF) + (b + EF)]$$

$$2(a + EF)(EF + b) = (a + b)(a + b + 2EF)$$

$$2(aEF + ab + EF^2 + bEF) = (a + b)(a + b) + 2EF(a + b)$$

$$2EF(a + b + EF) - 2EF(a + b) = (a + b)^2 - 2ab$$

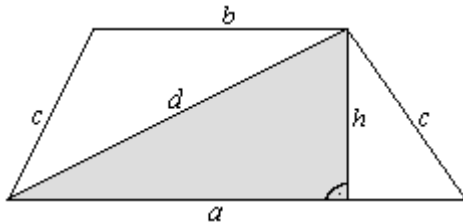
$$\cancel{2EF(a + b)} + 2EF^2 - \cancel{2EF(a + b)} = \cancel{a^2 + 2ab} + b^2 - \cancel{2ab}$$

$$2EF^2 = a^2 + b^2$$

$$EF = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

2) U jednakom trapezu površine $P=32$ i visine $h=4$, razlika osnovica je 6. Odrediti dužinu dijagonale .

Rešenje:



$$P = 32$$

$$h = 4$$

$$a - b = 6$$

$$d = ?$$

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$32 = \frac{a+b}{2} \cdot 4$$

$$32 = (a+b) \cdot 2$$

$$a+b=16$$

Sa ova dva podatka pravimo sistem

$$\left. \begin{array}{l} a+b=16 \\ a-b=6 \end{array} \right\} \oplus$$

$$\hline 2a = 22$$

$$a = 11 \Rightarrow b = 5$$

Primenimo Pitagorinu teoremu:

$$d^2 = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + h^2$$

$$d^2 = \left(\frac{11+5}{2} \right)^2 + 4^2$$

$$d^2 = 64 + 16$$

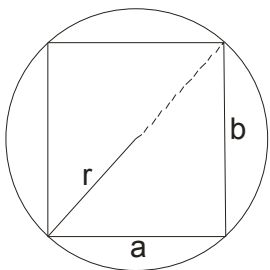
$$d^2 = 80$$

$$d = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5}$$

$$d = 4\sqrt{5}$$

3) U krugu obima $O = 10\pi$ upisan je pravougaonik čije se stranice odnose kao 3:4. Odrediti površinu pravougaonika

Rešenje:



$$O = 10\pi$$

$$a : b = 3 : 4$$

$$P = ?$$

$$r = \frac{d}{2} \Rightarrow d = 2r$$

$$O = 2r\pi$$

$$10\pi = 2r\pi$$

$$r = 5 \Rightarrow d = 10$$

Primenimo Pitagorinu teoremu:

$$a^2 + b^2 = d^2$$

$$(3k)^2 + (4k)^2 = 10^2$$

$$9k^2 + 16k^2 = 100$$

$$25k^2 = 100$$

$$k^2 = 4$$

$$k = 2$$

Pošto je $a : b = 3 : 4$

$$\text{Onda je: } \begin{cases} a = 3k \\ b = 4k \end{cases}$$

$$\overline{a = 3 \cdot 2 = 6}$$

$$b = 4 \cdot 2 = 8$$

$$P = a \cdot b$$

$$P = 6 \cdot 8$$

$$P = 48$$

4) Stranica romba je $a = 5$ a manja dijagonala $d_1 = 6$. Odrediti površinu upisanog kruga.

Rešenje:

$a = 5$ Najpre ćemo naći drugu dijagonalu d_2 .

$$\frac{d_1 = 6}{P_{kr} = ?} \quad \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$$

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 5^2$$

$$\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 16$$

$$\frac{d_2}{2} = 4 \Rightarrow d_2 = 8$$

Kako imamo 2 obrasca za P romba, to ćemo iskoristiti da nadujemo visinu:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$$

$$P = ah \Rightarrow h = \frac{P}{a} = \frac{24}{5} = 4,8$$

$$r = \frac{h}{2} \Rightarrow r = \frac{4,8}{2} = 2,4$$

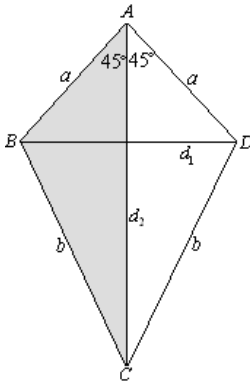
$$P_{kr} = r^2 \pi$$

$$P_{kr} = (2,4)^2 \pi$$

$$P_{kr} = 5,76\pi$$

5) Kraće stranice deltoida obrazuju prav ugao. Ako je obim deltoida $O = 6 + 2\sqrt{17}$, a dužina dijagonale $d_2 = 4\sqrt{2}$, odrediti površinu.

Rešenje:



$$O = 6 + 2\sqrt{17}$$

$$d_2 = 4\sqrt{2}$$

$$P = ?$$

$$O = 2a + 2b$$

$$6 + 2\sqrt{17} = 2a + 2b$$

$$3 + \sqrt{17} = a + b \Rightarrow b = 3 + \sqrt{17} - a$$

Primenimo kosinusnu teoremu na trougao ABC pošto je $\angle BAC = 45^\circ$

$$b^2 = a^2 + d_2^2 - 2ad_2 \cos 45^\circ$$

$$(3 + \sqrt{17} - a)^2 = a^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2a \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

PAZI: $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$

$$9 + 17 + a^2 + 6\sqrt{17} - 6a - 2\sqrt{17}a = a^2 + 32 - 8a$$

Sredimo

$$2a(1 - \sqrt{17}) = 6(1 - \sqrt{17})$$

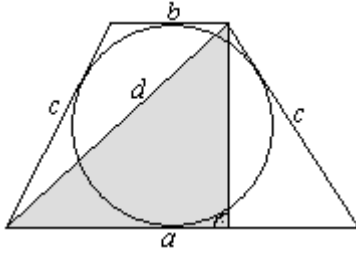
$$2a = 6$$

$$a = 3 \Rightarrow b = \sqrt{17}$$

$$d_1 = a\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 12$$

6) Oko kruga poluprečnika $r = \frac{3}{2}$ je opisan jednakokraki trapez površine $P = 15$. Izračunati dužinu dijagonale trapeza.

Rešenje:



Ovo je tangenti četvorougao!

$$a + b = 2c \quad (\text{ali nam sada neće trebati})$$

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$15 = \frac{a+b}{2} \cdot 3$$

$$\frac{a+b}{2} = 5$$

$$a+b = 10$$

$$r = \frac{3}{2}, P = 15$$

$$d = ?$$

$$h = 2r = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

$$d^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + h^2$$

$$d^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 3^2$$

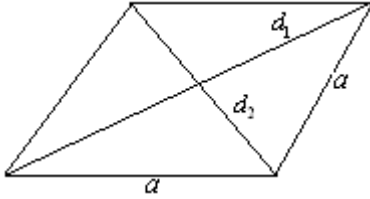
$$d^2 = 25 + 9$$

$$d^2 = 34$$

$$d = \sqrt{34}$$

7) Jedna dijagonala romba je za 20% kraća od druge. Ako je visina romba $h = \frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{41}}$, odrediti površinu romba.

Rešenje:



Zapišimo najpre podatke:

$$\begin{aligned}
 d_2 &= 80\%d_1 & \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 &= a^2 \\
 d_2 &= \frac{80}{100}d_1 & & \\
 d_2 &= \frac{4}{5}d_1 & \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{4}{5}d_1}{2}\right)^2 &= a^2 \\
 & & \frac{d_1^2}{4} + \frac{4d_1^2}{25} &= a^2 \\
 & & 25d_1^2 + 16d_1^2 &= 100a^2 \\
 & & 41d_1^2 &= 100a^2 \\
 & & a^2 &= \frac{41d_1^2}{100} \\
 & & a &= \frac{\sqrt{41}d_1}{10}
 \end{aligned}$$

$$P = a \cdot h = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

$$\frac{\cancel{\sqrt{41}} \cdot d_1}{10} \cdot \frac{4\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{41}}} = \frac{d_1 \cdot \frac{4}{5}d_1}{2}$$

$$4\sqrt{2} = \frac{2}{5}d_1$$

$$d_1 = 10\sqrt{2} \Rightarrow d_2 = \frac{4}{5}10\sqrt{2}$$

$$d_2 = 8\sqrt{2}$$

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2}}{2} = 80$$

$$\boxed{P = 80}$$