

Transformacije algebarskih izraza

Kako dati izraz rastaviti na činioce?

Prati sledeći postupak:

1) Izvuči zajednički iz svih ispred zagrade, naravno, ako ima (distributivni zakon)

2) Gledamo da li je neka formula:

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) \rightarrow \text{RAZLIKA KVADRATA}$$

$$I^2 + 2 \cdot I \cdot II + II^2 = (I + II)^2 \rightarrow \text{KVADRAT BINOMA} \quad \text{ili ako vam je lakše } A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$$I^2 - 2 \cdot I \cdot II + II^2 = (I - II)^2 \rightarrow \text{KVADRAT BINOMA} \quad \text{ili ako vam je lakše } A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2) \rightarrow \text{RAZLIKA KUBOVA}$$

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2) \rightarrow \text{ZBIR KUBOVA}$$

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \rightarrow \text{KUB ZBIRA}$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \rightarrow \text{KUB RAZLIKE}$$

3) Ako neće ništa od ove dve stavke, “sklapamo” 2 po 2, 3 po 3, itd.

PRIMERI

Izvlačenje zajedničkog ispred zagrade:

1) $5a + 5b = 5(a + b)$

2) $2a + 4b = 2(a + 2b)$ **PAZI: Kad vidimo da ništa ne ostaje pišemo 1(primer 3.)**

3) $a^2 - a = a(a - 1)$

4) $14ab^3 - 7a^2b = 7ab(2b^2 - a)$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \searrow \\ \boxed{7} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{a} \cdot \boxed{b} \cdot \boxed{b} \cdot \boxed{b} & & \boxed{7} \cdot \boxed{a} \cdot \boxed{a} \cdot \boxed{b} \end{array}$$

Ako nije jasno šta treba izvući ispred zagrade, možemo svaki član rastaviti:

$$14ab^3 = \underline{7} \cdot \underline{2} \cdot \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{b} \cdot \underline{b} \quad \text{i}$$

$$7a^2b = \underline{7} \cdot \underline{a} \cdot \underline{a} \cdot \underline{b}$$

Zaokružimo (podvučemo) iste i izvučemo ispred zagrade a one koje su ostali stavimo u zagradu!!!

5)

$$3x^2y + 6xy^2 - 3xy =$$

$$\underline{3} \cdot \underline{x} \cdot \underline{x} \cdot \underline{y} + \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{x} \cdot \underline{y} \cdot \underline{y} - \underline{3} \cdot \underline{x} \cdot \underline{y} = 3xy(x + 2y - 1)$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & 18a^3b^2 - 15a^2b^3 + 9a^3b^3 = \\
 & \underline{6} \cdot \underline{3} \cdot \underline{a} \cdot \underline{a} \cdot \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{b} - \underline{5} \cdot \underline{3} \cdot \underline{a} \cdot \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{b} \cdot \underline{b} + \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{a} \cdot \underline{a} \cdot \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{b} \cdot \underline{b} = \\
 & = 3a^2b^2(6a - 5b + 3ab)
 \end{aligned}$$

Naravno, možemo razmišljati i ovako:

Za 18, 15 i 9 zajednički je 3

Za a^3 , a^2 i a^3 zajednički je a^2 i

Za b^2 , b^3 i b^3 zajednički je b^2

Dakle, ispred zagrade je $\boxed{3a^2b^2}$.

$$7) \quad a^x + a^{x+1} = a^x + a^x \cdot a^1 = a^x(1 + a)$$

$$8) \quad a^{m+1} - a = a^m \cdot a^1 - a = a(a^m - 1)$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad & 4x^{a+2} + 12x^a = 4x^a \cdot x^2 + 12x^a \\
 & = 4x^a(x^2 + 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad & 12x^{2n+3} + 16x^{n+1} = 12x^{2n} \cdot x^3 + 16x^n \cdot x^1 \\
 & = 4x^n \cdot x(3x^n \cdot x^2 + 4) \\
 & = 4x^{n+1}(3x^{n+2} + 4)
 \end{aligned}$$

U zadacima 7, 8, 9 i 10 smo koristili pravila za stepenovanje!!!

UPOTREBA FORMULA:

$$\boxed{A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)}$$

$$1) \quad x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$$

$$2) \quad 9 - a^2 = 3^2 - a^2 = (3 - a)(3 + a)$$

$$3) \quad x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1)$$

$$4) \quad y^2 - 144 = y^2 - 12^2 = (y - 12)(y + 12)$$

$$5) \quad 4x^2 - 9 = 2^2x^2 - 3^2 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3)$$

Pazi: Da bi upotreбили formulu za razliku kvadrata "SVAKI" član mora da je na kvadrat.

$$6) \quad 25x^2 - 16y^2 = 5^2x^2 - 4^2y^2 = (5x)^2 - (4y)^2 = (5x - 4y)(5x + 4y)$$

$$7) \quad \frac{1}{16}x^2 - \frac{9}{25}y^2 = \frac{1^2}{4^2}x^2 - \frac{3^2}{5^2}y^2 = \left(\frac{1}{4}x\right)^2 - \left(\frac{3}{5}y\right)^2 = \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{5}y\right)\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{5}y\right)$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad & x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) \\
 & = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)
 \end{aligned}$$

$$\text{Dakle: } \boxed{x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)} \text{ ZAPAMTIMO!}$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad 16a^4 - 1 &= 2^4 a^4 - 1^4 \\
 &= (2a)^4 - 1^4, \text{ ako iskoristimo prethodni rezultat: } 2a = x \text{ i } 1 = y \\
 &= (2a - 1)(2a + 1)((2a)^2 + 1^2) \\
 &= (2a - 1)(2a + 1)(4a^2 + 1)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2} \quad \text{i} \quad \boxed{A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2}$$

1) $x^2 + 8x + 16 =$ Gledamo prvi i treći član jer nam oni daju A^2 i B^2 , a onaj u sredini proveravamo da li je $2 \cdot A \cdot B$

Kako je $A^2 = x^2 \Rightarrow A = x$

$$B^2 = 16 \Rightarrow B = 4$$

$$2 \cdot AB = 2 \cdot x \cdot 4 = 8x$$

Pa je $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

$$\begin{array}{ccc}
 2) \quad x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 & \text{jer je} & A^2 = x^2 \Rightarrow A = x \\
 \begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ A^2 & \downarrow & B^2 \end{array} & & \begin{array}{l} B^2 = 25 \Rightarrow B = 5 \\ 2AB = 2 \cdot x \cdot 5 = 10x \end{array}
 \end{array}$$

Proveri da li je $2AB$

3) $64 + 16y + y^2 = (8 + y)^2$

4) $a^2 + 4ab + 4b^2 = (a + 2b)^2$

5) $a^2 - 6ab + 9b^2 = (a - 3b)^2$

6) $4x^2 - 20xy + 25y^2 = (2x - 5y)^2$

7) $0,25 - 0,1a + 0,01a^2 = (0,5 - 0,1a)^2$ jer je

$$A^2 = 0,25 \Rightarrow A = 0,5$$

$$B^2 = 0,01a^2 \Rightarrow B = 0,1a$$

8) $0,04a^2 + 0,8ab + 4b^2 = (0,2a + 2b)^2$

$$\boxed{A^3 - B^3 = (A - B) \cdot (A^2 + AB + B^2)}$$

Najpre se podsetimo da je: $1 = 1^3$, $8 = 2^3$, $27 = 3^3$, $64 = 4^3$, $125 = 5^3$, $216 = 6^3$, $343 = 7^3$

1) $x^3 - 8 =$ da bi mogli da upotrebimo formulu oba člana moraju biti “na treći”

$$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 \quad \text{Znači } x \text{ je } A, 2 \text{ je } B \text{ pa zamenjujemo u formulu:}$$

$$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + x \cdot 2 + 2^2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

2) $x^3 - 216 = x^3 - 6^3 = (x - 6)(x^2 + x \cdot 6 + 6^2) = (x - 6)(x^2 + 6x + 36)$

$$3) 64 - y^3 = 4^3 - y^3 = (4 - y)(4^2 + 4y + y^2) = (4 - y)(16 + 4y + y^2)$$

$$4) 125x^3 - 1 = 5^3x^3 - 1^3 = (5x)^3 - 1^3 = \text{Pazi ovde se najčešće napravi greška: } A = 5x, B = 1 \\ = (5x - 1)((5x)^2 + 5x \cdot 1 + 1^2) = (5x - 1)(25x^2 + 5x + 1)$$

$$5) (a + 3)^3 - 8 = (a + 3)^3 - 2^3 = \text{pazi: } \boxed{a + 3 = A}, \boxed{2 = B} \\ = (a + 3 - 2)((a + 3)^2 + (a + 3) \cdot 2 + 2^2) \\ = (a + 1)(a^2 + 6a + 9 + 2a + 6 + 4) \\ = (a + 1)(a^2 + 8a + 19)$$

$$\boxed{A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)}$$

$$1) x^3 + 343 = x^3 + 7^3 = (x + 7)(x^2 - x \cdot 7 + 7^2) = (x + 7)(x^2 - 7x + 49)$$

$$2) 64a^3 + 1 = (4a)^3 + 1^3 = (4a + 1)((4a)^2 - 4a \cdot 1 + 1^2) = (4a + 1)(16a^2 - 4a + 1)$$

$$3) 27x^3 + y^3 = (3x)^3 + y^3 = (3x + y)((3x)^2 - 3x \cdot y + y^2) = (3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$$

$$4) \underbrace{(x+1)}_A + \underbrace{(y-2)}_B = (x+1+y-2) \cdot [(x+1)^2 - (x+1)(y-2) + (y-2)^2]$$

$$= (x + y - 1)[x^2 + 2x + 1 - (xy - 2x + y - 2) + y^2 - 4y + 4]$$

$$= (x + y - 1)[x^2 + 2x + 1 - xy + 2x - y + 2 + y^2 - 4y + 4]$$

$$= (x + y - 1)[x^2 + 4x + y^2 - 5y - xy + 7]$$

$$5) x^6 + y^6 = (x^2)^3 + (y^2)^3 = (x^2 + y^2)((x^2)^2 - x^2y^2 + (y^2)^2) = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$$

Redje se koristi da je:

$$\boxed{A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3 = (A \pm B)^3}$$

$$1) \underbrace{8x^3}_{A^3} + \underbrace{12x^2y}_{\text{Proveri}} + \underbrace{6xy^2}_{\text{Proveri}} + \underbrace{y^3}_{B^3} = \text{ako je } A^3 = 8x^3 \text{ onda } A = 2x \text{ i } B^3 = y^3 \text{ pa je } B = y$$

$$= (2x + y)^3$$

$$2) x^3 - 12x^2y + 4xy^2 - 64y^3 = (x - 4y)^3 \text{ jer je}$$

$$A^3 = x^3 \Rightarrow A = x$$

$$64y^3 = B^3 \Rightarrow B = 4y$$

3)

$$125a^3 + 150a^2b + 60ab^2 + 8b^3 = (5a + 2b)^3 \text{ jer je}$$

$$125a^3 = (5a)^3 \text{ i } 8b^3 = (2b)^3$$

SKLAPANJE "2 po 2"

U situaciji kad ne možemo izvući zajednički, niti upotrebiti neku formulu, koristimo sklapanje "2 po 2".

Primeri:

1) $2x + 2y + ax + ay =$ izvlačimo ispred zagrade zajednički za prva dva, pa druga dva.

$$\underline{2(x+y)} + \underline{a(x+y)} = (x+y)(2+a) \quad \text{jer je } (x+y) \text{ zajednički za ova dva člana}$$

2) $\underline{6ax - 9bx} + \underline{8ay - 12by} =$

$$3x(\underline{2a - 3b}) + 4y(\underline{2a - 3b}) = (2a - 3b)(3x + 4y)$$

3) $\underline{4a^2 + 4a} - \underline{ab - b} =$ **PAZIMO NA ZNAK!**

$$\underline{4a(a+1)} - \underline{b(a+1)} = (a+1)(4a - b)$$

4) $\underline{12ab + 20a} - \underline{3b - 5} =$ **PAZIMO NA ZNAK: IZ DRUGA DVA UZIMAMO -1**

$$\underline{4a(3b+5)} - \underline{1(3b+5)} = (3b+5)(4a-1)$$

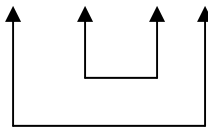
5) $\underline{xa - xb} + \underline{yb - ya} =$

$$= x(a-b) + y(b-a) = \text{Ovde moramo "okrenuti"}$$

izraz $b-a$ da postane $a-b$, ALI PAZI, kako je $b-a = -(a-b)$, moramo promeniti znak ispred y

$$= \underline{x(a-b)} - \underline{y(a-b)} = (a-b)(x-y)$$

6) $2ax + b - 2bx - a =$ ne "juri" da sklopiš "prva dva" i "druga dva" možda je bolja neka druga kombinacija!!



$= a(2x-1) + b(1-2x) =$ Slično kao u prethodnom primeru, promenimo znak ispred b , a oni u zagradi promene mesta,

$$= \underline{a(2x-1)} - \underline{b(2x-1)} = (2x-1)(a-b)$$

$$7) \quad 8x^2y - 2by + 2bx - 8xy^2 = 8xy \underline{(x-y)} + 2b \underline{(x-y)} = (x-y)(8xy + 2b)$$

8) $x^2 - 6x - 7 =$ Ovo liči na kvadrat binoma ali očigledno nije. Ne možemo izvući zajednički iz svih, niti sklopiti "2 po 2"

Šta raditi?

Naravno, učenici II godina srednje škole i stariji znaju da treba iskoristiti da je $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, ali u I godini srednje škole moramo raditi ovako:

1. način: $x^2 - 6x - 7 =$ ideja je da se srednji član napiše kao zbir ili razlika neka 2 izraza. Naravno, to možemo učiniti na veliki broj načina. Onaj prvi je kad posmatramo član bez x-sa i kako njega možemo predstaviti u obliku proizvoda. Kako je $7 = 7 \cdot 1$ to ćemo napisati umesto $-6x$ izraz $-7x + 1x$ ili $+1x - 7x$, *svejedno*.

Onda sklapamo "2 po 2"

$$x^2 - 6x - 7 = x^2 - 7x + 1x - 7 = x(x - 7) + 1(x - 7) = (x - 7)(x + 1)$$

2. način: $x^2 - 6x - 7 =$ izvršimo dopunu do "punog" kvadrata, što znači da moramo dodati (i oduzeti) drugi član na kvadrat.

$$= \underbrace{x^2 - 6x + 3^2}_{(x-3)^2} - 3^2 - 7 =$$

= **zapamtimo:** uvek dodaj (i oduzmi) onaj uz x podeljen sa 2, pa na kvadrat. =

$$= \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} - 9 - 7$$

$$= (x - 3)^2 - 16$$

$$= (x - 3)^2 - 4^2 \quad = \text{sada iskoristimo da je ovo razlika kvadrata.}$$

$$= (x - 3 - 4)(x - 3 + 4)$$

$$= (x - 7)(x + 1)$$

Ti naravno izabereš šta ti je lakše, odnosno šta više voli tvoj profesor.

Evo još par primera:

9) $x^2 + 5x + 6 = ?$

1.način: Kako je $6 = 3 \cdot 2$ to ćemo umesto $5x$ pisati $3x + 2x$

$$\underbrace{x^2 + 3x} + \underbrace{2x + 6} = x(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(x + 2)$$

2.način: Dodajemo (i oduzmemo) onaj uz x podeljen sa 2, pa na kvadrat.

Znači $+\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$, pa je:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= x^2 + 5x + \underbrace{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} + 6 && \text{ovde odmah zamenimo } 6 = \frac{24}{4} \\ &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{24}{4} \\ &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\ &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= (x + 2)(x + 3) \end{aligned}$$

10) $x^2 + 7x + 10 = ?$

1.način: $\underbrace{x^2 + 5x} + \underbrace{2x + 10} = x(x + 5) + 2(x + 5) = (x + 5)(x + 2)$

2.način: $x^2 + 7x + 10 = x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 10$

$$\begin{aligned} &= \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{40}{4} \\ &= \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \\ &= \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\right) \\ &= (x + 2)(x + 5) \end{aligned}$$