ISKAZI

U svakodnevnom govoru, a i u pisanom tekstu, obično se sreću rečenice koje su ili tačne ili netačne, tj rečenice koje imaju logičkog smisla.Ovakve rečenice se u matematici nazivaju iskazi.Dakle , **pod iskazom podrazumevamo bilo koju rečenicu za koju se zna da može biti samo tačna ili samo netačna.**Drugim rečima, iskaz može da ima samo jednu od istinitosnih vrednosti: istinit (tačan), neistinit (netačan).

Primer:

Nije teško videti koja je od sledećih rečenica iskaz:

- Broj 6 je veći od broja 2
- Broj 3 je deljiv brojem 2
- Zemlja se okreće oko Sunca
- Broj 2 je veći od Nataše
- Godina ima 365 dana

Prve tri rečenice jesu iskazi, jer su redom tačna, netačna i tačna, dok za zadnje dve rečenice ne možemo to tvrditi, dakle , nisu iskazi.

Iskaze ćemo, po dogovoru, obeležavati malim slovima latinice: p,q,r,s,t....a ta slova ćemo zvati iskazna slova.Polazeći od takvih elementarnih iskaza,dakle, iskaznih slova, slično kao što u srpskom jeziku od prostih rečenica pravimo složene, možemo napraviti i složene iskaze.Tu će za nas biti značajno da znamo kada će ti novi iskazi biti tačni ili netačni.

U tom cilju uvodimo oznake :

T – za tačno (čita se te) i $\perp$ - za netačno (čita se ne-te)

Istinitosna vrednost nekog iskaza p, koji ćemo označavati sa τ (p) (čita se tau od te), biće:

τ(t)=T, ako je iskaz p tačan
τ(t)= $\perp$, ako je iskaz p netačan

LOGIČKE OPERACIJE

Neka su dati iskazi p i q.

Konjukcija iskaza p i q je iskaz $p \wedge q$ kojem odgovara sledeća istinitosna tablica:

p	q	$p \wedge q$
T	**T**	**T**
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Konjukcija je tačna samo ako su p i q tačni iskazi.

Disjunkcija iskaza p i q je iskaz $p \vee q$ kojem odgovara sledeća tablica:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	$\perp$	T
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Disjunkcija je netačna samo ako su oba iskaza , i p i q, netačni.

Ovde treba obratiti pažnju na razliku između upravo definisanog veznika disjunkcije i veznika takozvane **isključne disjunkcije** kojem odgovara jezička forma **"ili..,ili…".** Razlika je u tome što iskaz "ili p ili q" nije tačan ni u slučaju kada su oba iskaza , i p i q, tačni, dok je iskaz "p ili q" tačan.

Implikacija iskaza p i q je iskaz $p \Rightarrow q$ kojem odgovara sledeća tablica:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	T

Implikacija je netačna jedino u slučaju kada je iskaz p tačan i iskaz q netačan.

Jedan od najznačajnijih veznika za nas je upravo veznik implikacije. Rečenica

"p implicira q" se sa nepromenjenim značenjem može zapisati i na jedan od sledećih

načina:

" ako p, onda q"

" iz p sledi q"

"q, ako p"

" p je dovoljan uslov za q"

" q je potreban uslov za p"

Ekvivalencija iskaza p i q je iskaz $p \Leftrightarrow q$ čije se istinitosne vrednosti zadaju tablicom:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T

Ekvivalencija je tačna samo ako oba iskaza, i p i q, imaju istu istinitostnu vradnost.

Rečenicu **“p je ekvivalentno sa q”** možemo iskazati i na jedan od sledećih načina:

“ ako p , onda q, i ako q, onda p”

“ p je potreban i dovoljan uslov za q”

“ p ako i samo ako q”

To su bili osnovni **binarni** logički veznici (operacije). Binarni , zato što dva iskaza prave jedan novi iskaz. Uvešćemo sada jedan **unarni** veznik (operaciju), koji od jednog iskaza p pravi jedan novi iskaz , složeniji.To je $\neg p$, koji se čita “ne-p”.

Negacija iskaza p je iskaz $\neg p$ kojem odgovara tablica:

P	$\neg p$
T	$\perp$
$\perp$	T

Očigledno je iskaz $\neg p$ tačan samo u slučaju kada je iskaz p netačan.

Zajedno, iskazne konstante (T i $\perp$), sva iskazna slova i sve složene iskaze nazivamo **iskaznim formulama**.Da bi jedna iskazna formula bila nedvosmisleno zapisana, prilikom zapisivanja koristimo i zagrade.Polazimo od toga da je **negacija operacija najvišeg prioriteta**,za njom su konjukcija i disjunkcija, koje su međusobno ravnopravne, na kraju su implikacila i ekvivalencija, takođe međusobno ravnopravne.

Primer:

Niz simbola $p \wedge q \vee r$ **ne možemo** prihvatiti kao formulu, jer se ne zna redosled operacija, pošto su konjukcija i disjunkcija “iste snage”. Trebalo bi biti zapisano na sledeci način: $(p \wedge q) \vee r$ ili $p \wedge (q \vee r)$.

Dakle, iskazne formule su iskazi formirani od iskaznih slova p,q,r,…, znakova

$\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ i zagrada, primenom konačnog broja puta ovih simbola.

Iskazne formule koje su uvek, za sve moguće vrednosti iskaznih slova koja čine te formule tačne, nazivamo tautologijama.

Da li je neka formula tautologija možemo proveriti na više načina: diskusijom po slovu, svođenjem na protivrečnost, preko istinitosnih tablica, itd.

Evo jednog primera ispitivanja preko istinitosne tablice:

$(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

Pazi: Uvek prvo napisi negacije,jer su najstarija operacija

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	p$\Rightarrow$ q	$(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
T	T	$\perp$	$\perp$	T	T	T
T	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	T	$\perp$	T	T	T	T
$\perp$	$\perp$	T	T	T	T	T

$\Rightarrow$

NEKA PRAVILA LOGIČKOG ZAKLJUČIVANJA

Tautologije, kao uvek tačni iskazi, u sebi kriju zakonitosti po kojima se vladaju logički veznici, pa, prema tome, i zakonitosti pravilnog logičkog zaključivanja.neka od nezaobilaznih i najčešće primenjivanih, a ujedno i najjednostavnijih logičkih zakona su:

$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ modus ponens

$(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ pravilo kontrapozicije (ispitano u tablici)

$(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$ svođenje na protivrečnost

$p \vee \neg p$ zakon isključenja trećeg

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ De Morganovi zakoni
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

$\neg\neg\, p \Leftrightarrow p$ zakon dvojne negacije itd.

Ispitajmo modus ponens upotrebom svođenja na protivrečnost:

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$$

Pretpostavimo da je formula netačna.Budući da je implikacija netačna samo u jednom slučaju, onda mora biti:

$$\tau(p \wedge (p \Rightarrow q)) = \mathrm{T} \quad \text{i} \quad \tau(q) = \perp$$

Dalje, kako je konjukcija tačna samo ako su oba izraza tačna , mora biti:

$$\tau(p) = \mathrm{T} \quad \text{i} \quad \tau(p \Rightarrow q) = \mathrm{T}$$

Pogledajmo tablicu za implikaciju: Pošto smo zaključili da je $\tau(p) = \mathrm{T}$ i $\tau(q) = \perp$

mora biti $\tau(p \Rightarrow q) = \perp$ što je u kontradikciji sa

$\tau(p \Rightarrow q) = \mathrm{T}$.

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	T

Znači da polazna pretpostavka nije dobra, odnosno da je formula tautologija(tačna).

PRIMERI:

1. **Dati su iskazi** : p: (-2)(-3)=-(-6); q: $\frac{1}{5}$=0,2 ; r: $-3^2=(-3)^2$

Ispitati istinitostnu vrednost iskaza: $\neg p \Rightarrow (q \vee r)$

Rešenje: Kod ovog tipa zadatka najpre odredimo vrednosti iskaza p,q,r , pa te vrednosti zamenimo u datu formulu.(ovde nije potrebno praviti celu tablicu, već samo jednu vrstu , za dobijene vrednosti za p,q,r)
Dakle:

(-2)(-3)=6 i -(-6)=6, pa je iskaz p- tačan , to jest $\tau(p) = T$
0,2=$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, pa je i iskaz q – tačan, to jest $\tau(q)$=T
-3^2= -9 a $(-3)^2$=(-3)(-3)=9 pa je iskaz r – netačan, to jest $\tau(r) = \perp$
Zamenimo sada ove vrednosti u datoj formuli:

$\neg p \Rightarrow (q \vee r) = \neg T \Rightarrow (T \vee \perp) = \perp \Rightarrow T$ = T. Dakle , dati iskaz je tačan.

2. **Ispitati da li je sledeća formula tautologija (tablično):**

$$F: (\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((r \vee p) \wedge q)$$

Kad imamo tri iskazna slova, potrebno nam je 8 vrsta:

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow$q	r$\vee$p	(r$\vee$p)$\wedge$q	F
T	T	T	$\perp$	T	T	T	T
T	T	$\perp$	$\perp$	T	T	T	T
T	$\perp$	T	$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$
T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T	T	T	T	T	T
$\perp$	T	$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$	T	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T

Dakle ova formula nije tautologija, jer ima na kraju na tri mesta netačno(dovoljno je i samo na jedno)
ZAPAMTI: kod **p-** idemo 4 tačna, 4 netačna;
kod **q -** 2 tačna ,2 netačna;
kod **r -** 1 tačno ,1 netačno

$\Leftrightarrow$

KVANTORI (KVANTIFIKATORI)

Posmatrajmo rečenicu**: “** $\mathbf{x}^2 = 25$ “. Očigledno ona nije iskaz, jer može biti tačna ako je $x = 5$ ili $x = -5$, a može biti i netačna ako je x neki drugi broj.

Ako,međutim rečenicu kažemo:

“ Za svaki x, $\mathbf{x}^2 = 25$” ili “Postoji x tako da je $\mathbf{x}^2 = 25$”, onda za njih možemo reći da je prva netačna a druga tačna, pa one predstavljaju iskaze.

Upotrebom matematičke terminologije možemo zapisati:

“ Za svaki x, $\mathbf{x}^2 = 25$” je $(\forall x)\,(\mathbf{x}^2 = 25)$
“Postoji x tako da je $\mathbf{x}^2 = 25$” je $(\exists x)\ (\mathbf{x}^2 = 25)$

Ove reči , **za svaki** (bilo koji, za proizvoljan), i **postoji** (ili za neki) **zovemo kvantori** ili kvantifikatori.

Dakle:

$\forall$ - se čita **za svaki** i zove se **univerzalni** kvantor,

$\exists$ - se čita **postoji** i zove se **egzistencijalni** kvantor

Zanimljivo je kako se kvantori ponašaju **u prisustvu negacije**:

$$\neg(\forall x)A \Leftrightarrow (\exists x)\neg A \quad \text{i}$$
$$\neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A$$

Rečima objašnjeno to bi značilo da **nije svaki** i **neki nije** imaju isto značenje, odnosno da izrazi **nije neki** i **svaki nije** imaju isto značenje.

Na primer, rečenice:” Nije svaki profesor dobar” i “ Postoji profesor koji nije dobar” imaju isto značenje.

3. Pomoću kvantifikatora napisati sledeće matematičke formule:

a) Postoji prirodan broj x koji zadovoljava jednačinu $x+2=9$

b) Za svako x i za svako y je $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

c) Za svaki x postoji y tako da je $x+4y=32$

Rešenje:

a) Postoji prirodan broj x koji zadovoljava jednačinu $x+2=9$

$$(\exists x\in N)(x+2=9)$$

b) Za svako x i za svako y je $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$(\forall x)(\forall y)(x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2))$$

c) Za svaki x postoji y tako da je $x+4y=32$

$$(\forall x)(\exists y)(x+4y=32)$$

4. Napisati rečima sledeće iskaze:

a) $(\forall a\in N)(\exists b\in Z)(a+b=0)$

b) $(\exists x\in Q)(x>1\wedge x<2)$

Rešenje:

a) $(\forall a\in N)(\exists b\in Z)(a+b=0)$

Za svaki broj iz skupa prirodnih brojeva postoji broj iz skupa celih brojeva tako da je njihov zbir nula.

b) $(\exists x\in Q)(x>1\wedge x<2)$

Postoji broj iz skupa racionalnih brojeva koji je veći od 1 i manji od 2.